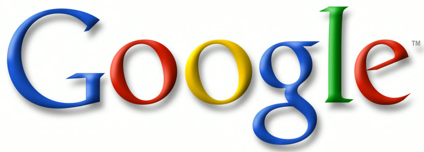


ANALYTISK PLANGEOMETRI

AF

JULIUS PETERSEN.

ANDEN DEL.

KJØBENHAVN.
E. C. T. WÄTZOLDS FORLAG.
(P. BLOCHS EFTF.)
1877.

I. COHENS BOGTRYKKERI.

§ I. Parallelkoordinater.

1. Lad OX og OY være to vilkaarlige rette Linier med de positive Retninger X og Y, og hvor $(XY) = \tilde{\omega}$. Disse Linier kunne benyttes som Axer for et skjævvinklet Koordinatsystem. Et Punkt P bestemmes da ved Abscissen OM og Ordinaten MP, idet $MP \parallel OY$. I dette System er det retvinklede indbefattet, idet det svarer til $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$.

Brugen af skjævvinklede Koordinater kan ofte være bekvem, idet man kan tage to vilkaarlige Linier af en Figur som Axer og derved simplificere Regningen; navnlig gjælder dette om saadanne Opgaver, hvor de Formler, man skal anvende, ere ligesaa simple for skjævvinklede som for retvinklede Koordinater.

2. Afstanden mellem to Punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ses let at være den ene Side af en Trekant, hvis to andre Sider ere $x_1 - x_2$ og $y_1 - y_2$, medens deres mellemliggende Vinkel er $\tilde{\omega}$; man har altsaa

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \tilde{\omega}. \quad (1)$$

3. Afstanden fra en Linie til et Punkt. Lad Liniens Normal gjennem O have den positive Retning L og skjære den givne Linie i P; vi sætte

$$PO = p;\ XL = \alpha;\ YL = \beta \text{ altsaa } \alpha - \beta = \tilde{\omega}.$$

Lad endvidere Koordinaterne til det givne Punkt M være

$$NM = y_1;\ ON = x_1;$$

vi faa da, ved at projicere M og N paa L i M_1 og N_1

$$d = PM_1 = PO + ON_1 + N_1M_1$$

eller

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + p, \tag{2}$$

hvor man maa erindre, at $\alpha - \beta = \tilde{\omega}$.

Af den fundne Ligning følger, at Ligningen for den ved α, β og p bestemte Linie er

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + p = 0, \tag{3}$$

der for $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}$ antager den bekjendte Normalform.

4. Koordinaternes Ændring. En Parallelforskydning af Koordinatsystemet udføres som ved et retvinklet System; vi ville derfor blot søge de Formler, der skulle benyttes, naar man vil benytte to nye Axer OX_1 og OY_1 med de positive Retninger X_1 og Y_1, og den positive Omløbsretning beholdes uforandret.

Lad et Punkt P i de to Systemer have Koordinaterne

$$MP = y;\ OM = x;\ M_1P = y_1;\ OM_1 = x_1;$$

de brudte Linier OMP og OM_1P have samme Projektion paa en vilkaarlig Linie R; man faar herved

$$x \cos(XR) + y \cos(YR) = x_1 \cos(X_1R) + y_1 \cos(Y_1R)$$

eller, naar R vælges saaledes, at enten $(YR) = \frac{\pi}{2}$ eller $(XR) = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x \sin(XY) &= x_1 \sin(X_1Y) + y_1 \sin(Y_1Y), \\ y \sin(XY) &= x_1 \sin(XX_1) + y_1 \sin(XY_1), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

der, dersom det givne System er retvinklet, gaa over til

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos(XX_1) + y_1 \cos(XY_1), \\ y &= x_1 \sin(XX_1) + y_1 \sin(XY_1), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

der endelig, hvis ogsaa det ny System er retvinklet, gaa over til de tidligere fundne (I, (100)*).

5. De fundne Formler vise, at Overgang fra et Parallelkoordinatsystem til et andet ikke kan forandre en Lignings Grad (en algebraisk Kurves Orden), thi Koordinaterne udtrykkes lineært ved hverandre. Den rette Linie bliver derfor ogsaa ved et skjævvinklet Koordinatsystem Kurven af første Orden, ligesom Keglesnittene blive Kurverne af anden Orden. Da vi have undersøgt den almindelige Ligning af anden Grad for retvinklede Koordinater, behøve vi ikke at gjøre det for skjævvinklede Koordinater, thi en Ændring af den sidste Ligning kan føre den tilbage til den første, saa at den ene ikke kan tilhøre andre Kurver end den anden.

Som vi have anført, bør man især lægge Mærke til saadanne Former af Ligninger, der fra retvinklede Koordinater, blot med en udvidet Betydning, kunne overføres paa skjævvinklede; vi skulle derfor betragte de vigtigste af disse.

6. Den rette Linie gjennem Punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ses som ved retvinklede Koordinater at have Ligningen

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (6)$$

thi denne Ligning tilhører en ret Linie og tilfredsstilles af de givne Koordinater; specielt bliver

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \quad (7)$$

*) I betegner Bogens første Del.

Ligningen for den Linie, der afskjærer Stykkerne p og q af Axerne.

Indsættes i (6) x_3 og y_3 for x og y, faas Betingelsen for, at de tre Punkter (x_1, y_1), (x_2, y_2) og (x_3, y_3) ligge i en ret Linie

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{8}$$

Betingelsen for, at tre rette Linier skjære hverandre i eet Punkt, findes ved at eliminere x og y af deres Ligninger og findes derfor som tidligere, idet man sætter Ligningens Determinant lig Nul. Ligeledes ser man let, at det Punkt, der deler en given Linie i et givet Forhold, bestemmes ved de for retvinklede Koordinater udviklede Formler (I, (4)), ligesom at Betingelsen for, at fire Punkter ligge harmonisk bliver uforandret (I, (6)).

De Formler, der vedblive at gjælde ere altsaa saadanne, der kun vedrøre Beliggenhed af Punkter og rette Linier, medens Formler, der vedrøre Længder og Vinkler i Almindelighed ved skjævvinklede Koordinater faa en sammensat Form, der gjør deres Anvendelse ubekvem.

1—5. Ved Hjælp af skjævvinklede Koordinater løses de Opgaver i I, der have Nummerne 15, 16, 18, 29 og 32.

6. I en Trekant ABC skjære Linierne Aa, Bb, Cc hverandre i eet Punkt; bevis, at de Punkter a_1, b_1 og c_1, der ere harmonisk forbundne med a, b og c med Hensyn til Vinkelspidserne, ligge i en ret Linie.

7. Parablen, henført til en Diameter og Tangenten i dens Endepunkt som Axer.

Vi sætte først i $y^2 = px$ for y og x henholdsvis

$y+b$ og $x+a$, hvor (a, b) er Tangentens Røringspunkt; vi faa da

$$y^2+2yb=px;$$

vi benytte nu (5), hvor $(XX_1)=0$, $(XY_1)=\varphi$, idet $tg\,\varphi=\frac{p}{2b}$, altsaa

$$x=x_1+y_1\cos\varphi;\quad y=y_1\sin\varphi,$$

der, idet $2by_1\sin\varphi=py_1\cos\varphi$, give

$$y_1^2=\frac{p}{\sin^2\varphi}x_1=p_1x_1, \qquad (9)$$

der har den samme Form som i det specielle Tilfælde, naar (a, b) er Parablens Toppunkt. Overensstemmelsen viser sig i endnu højere Grad, naar vi lægge Mærke til, at p_1 netop er 4 Gange Afstanden fra det ny Begyndelsespunkt til Brændpunktet. Man slutter heraf let, at

$$2yy_1=p(x+x_1) \qquad (10)$$

er Ligningen for henholdsvis Tangent og Polar i dette Koordinatsystem, thi idet man udtrykker Betingelsen for, at en ret Linie skærer Kurven i to sammenfaldende Punkter o. s. v., kommer man til at udføre netop de samme Regninger her som ved retvinklede Koordinater. Derimod tør vi ikke slutte, at Normalen har samme Ligning i begge Tilfælde, da Betingelsen for, at to Linier ere vinkelrette paa hinanden, ikke er den samme i begge Tilfælde.

8. Hyperblen, henført til sine Asymptoter som Axer.

Vi have

$$(XX_1)=-\alpha;\quad (XY_1)=\alpha, \text{ idet } tg\,\alpha=\frac{b}{a};$$

altsaa er

$$x=(x_1+y_1)\cos\alpha;$$
$$y=(y_1-x_1)\sin\alpha,$$

følgelig

$$\frac{(x_1+y_1)^2 \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{(y_1-x_1)^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1,$$

men

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = 0; \quad \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{b^2} = \frac{2}{a^2+b^2},$$

hvorved den søgte Ligning bliver

$$x_1 y_1 = \frac{a^2+b^2}{4}. \qquad (11)$$

Denne Ligning udtrykker, at Rektangler, hvis to Sider falde paa Asymptoterne, medens den ene Vinkelspids falder paa Kurven, have konstant Areal.

De to Asymptoter kunne sammenfattes i Ligningen $xy = 0$; søger man Skjæringspunkterne for en vilkaarlig ret Linie og denne sammensatte Kurve og for Linien og Hyperblen, kunne de to Ligninger af anden Grad, som man derved faar, kun blive forskjellige i deres bekjendte Led. Rødderne maa altsaa i begge Tilfælde have samme Sum; ere x_1 og x_2 Abscisserne til Skjæringspunkterne med Hyperblen, ξ_1 og ξ_2 til Skjæringspunkterne med Asymptoterne, har man altsaa

$$x_1 + x_2 = \xi_1 + \xi_2 \text{ eller } x_1 - \xi_1 = \xi_2 - x_2,$$

der udtrykker, at de to Stykker af en vilkaarlig Linie, der falde mellem Hyperblen og dens Asymptoter, ere lige store. Specielt følger heraf, at det Stykke af en Tangent, der ligger mellem Asymptoterne, halveres i Røringspunktet; Tangentens Ligning bliver derfor

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1, \qquad (12)$$

idet (x_1, y_1) er Røringspunktet.

7. Siderne i et Parallelogram ere parallele med en Hyperbels Asymptoter; den ene Diagonal er Korde i Hyperblen; bevis, at den anden Diagonal gaar gjennem Centrum.

8. Bevis, at det Stykke af en af Asymptoterne, som afskjæres af to Tangenter, halveres af Røringskorden.

9. Ellipse og Hyperbel, henførte til et Par konjugerede Diametre som Axer.

Idet $(XX_1) = u$, $(XY_1) = v$, faar man

$$\frac{(x_1 \cos u + y_1 \cos v)^2}{a^2} \pm \frac{(x_1 \sin u + y_1 \sin v)^2}{b^2} = 1,$$

eller, idet $\frac{\cos u \cos v}{a^2} \pm \frac{\sin u \sin v}{b^2} = 0$,

$$x_1^2 \left(\frac{\cos^2 u}{a^2} \pm \frac{\sin^2 u}{b^2} \right) \pm y_1^2 \left(\frac{\sin^2 v}{b^2} \pm \frac{\cos^2 v}{a^2} \right) = 1,$$

der skrives

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1, \qquad (13)$$

idet

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} \pm \frac{\sin^2 u}{b^2}; \quad \frac{1}{b_1^2} = \frac{\sin^2 v}{b^2} \pm \frac{\cos^2 v}{a^2},$$

hvor

$$a^2 \sin u \sin v \pm b^2 \cos u \cos v = 0.$$

Ved at søge Skjæringspunkterne med Axerne, se vi, at a_1 og b_1 ere Ellipsens eller Hyperblens konjugerede Halvdiametre, i Overensstemmelse med Betydningen af a og b ved et retvinklet Koordinatsystem.

Dersom man vil vende tilbage til det oprindelige Koordinatsystem, indsætter man ifølge (4), idet $\tilde{\omega} = v - u$,

$$x_1 \sin \tilde{\omega} = x \sin v - y \cos v,$$
$$y_1 \sin \tilde{\omega} = - x \sin u + y \cos u$$

i (13), der derved maa gaa over til Ligningen i retvinklede Koordinater; ved Sammenligning af Koefficienterne faar man da for Ellipsen

$$\frac{sin^2 v}{a_1^2} + \frac{sin^2 u}{b_1^2} = \frac{sin^2 \tilde{\omega}}{a^2}; \quad \frac{cos^2 v}{a_1^2} + \frac{cos^2 u}{b_1^2} = \frac{sin^2 \tilde{\omega}}{b^2};$$

$$\frac{sin\, v\; cos\, v}{a_1^2} + \frac{sin\, u\; cos\, u}{b_1^2} = 0.$$

Subtraherer man Kvadratet af den sidste Ligning fra Produktet af de to første, faar man ved en Ændring

$$a_1 b_1\, sin\, \tilde{\omega} = ab, \tag{14}$$

hvorved de to første blive

$$a_1^2\, sin^2 u + b_1^2\, sin^2 v = b^2; \quad a_1^2\, cos^2 u + b_1^2\, cos^2 v = a^2, \tag{15}$$

hvoraf

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2 \tag{16}$$

(14) viser, at Arealet af et Parallelogram, der er omskrevet om en Ellipse, er konstant, 15, at Summen af Kvadraterne af et Par konjugerede Halvdiametres Projektioner paa en af Axerne er konstant og (16), at Summen af to konjugerede Halvdiametres Kvadrater er konstant. Ombyttes b^2 og b_1^2 med $-b^2$ og $-b_1^2$, faas de analoge Formler for Hyperblen.

Af (14) og (16) følge, at Kvadraterne af et Par konjugerede Halvdiametre, der danne Vinklen $\tilde{\omega}$, bestemmes ved Ligningen

$$z^2 - (a^2 + b^2)z + \frac{a^2 b^2}{sin^2 \tilde{\omega}} = 0.$$

9. Fra et vilkaarligt Punkt af en Ellipse drages Linier til en Diameters Endepunkter; bevis, at disse Linier skjære den konjugerede Diameter i Punkter, der ere harmonisk forbundne med dens Endepunkter.

10. Bevis, at Produktet af de Stykker, som et Par konjugerede Diametre afskjære paa en Tangent, er lig Kvadratet af den med Tangenten parallele Halvdiameter.

11. En Ellipse og en Hyperbel have et Par konjugerede Halvdiametre, der dække hinanden; til et Punkt af Hyperblen trækkes en Tangent, og til dennes Skjæringspunkter med Ellipsen trækkes Tangenter; find det geometriske Sted for disses Skjæringspunkt.

12. Henfør en Ellipse til de Linier, der forbinde Brændpunkterne med den lille Axes ene Endepunkt, som Axer.

§ 2. Polære Koordinater.

10. Lad O (Polen) være et fast Punkt i den faste Axe X. Et Punkt M er da bestemt ved

$$r = OM; \quad \theta = (XM),$$

idet M er den positive Retning af OM.

r kaldes Radius vektor; r og θ kaldes Punktets polære Koordinater.

Tage vi O til Begyndelsespunkt og X til Abscisseaxe for et retvinklet System, have vi

$$\left.\begin{array}{l} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \end{array} \quad \text{og} \quad \begin{array}{r} tg\, \theta = \dfrac{y}{x}, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Disse Formler benyttes til Overgang fra det ene System til det andet; i Forbindelse med de tidligere udviklede Formler tjene de til Overgang fra det polære System til et hvilketsomhelst Parallelsystem og omvendt; de to Sæt Formler anvendes da lettest det ene efter det

andet, saa at man mellem de to Systemer indskyder det retvinklede System.

Dersom man i det polære System, uden at flytte Polen, vil benytte en Axe X_1, idet $(XX_1) = \alpha$, har man

$$\theta = (XM) = (XX_1) + (X_1M) = \theta_1 + \alpha.$$

11. Den rette Linie. Ligningen $ax + by = c$ ændres til

$$r(a \cos \theta + b \sin \theta) = c; \qquad (18)$$

har Ligningen Normalformen

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + p = 0,$$

bliver den polære Ligning

$$r \cos(\theta - \alpha) + p = 0. \qquad (19)$$

Særligt mærkes, at $\theta =$ konst. bliver Ligningen for en Linie gjennem Polen.

12. Cirklens polære Ligning faar navnlig en simpel Form, naar Cirklens Centrum falder i Polen, og naar Polen ligger paa Periferien; man faar i de to Tilfælde

$$r = \text{konst.}; \quad r + a \cos \theta + b \sin \theta = 0; \qquad (20)$$

den sidste antager, naar Centrum ligger i Axen, den simple Form

$$r = a \cos \theta, \qquad (21)$$

hvor a er Diametren.

At Ligningen i r bliver af første Grad ligger i, at vi have bortdivideret en Faktor r; dette er altid muligt, naar Kurven gaar gjennem Polen, idet en af Værdierne af r da bliver Nul for enhver Værdi af θ. Gaa flere Grene af en Kurve gjennem Polen, reduceres Ligningen i r en Grad for hver Gren.

Cirklen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - \rho^2 = 0$$

faar den polære Ligning

$$r^2 - 2r(a \cos\theta + b \sin\theta) + a^2 + b^2 - \rho^2 = 0,$$

der viser, at de to Værdier af r have det konstante Produkt $a^2 + b^2 - \rho^2$, som vi have vist det tidligere (I, (43)).

13. Keglesnits polære Ligninger. Ligningen

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2$$

bliver ved (17) til

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2\theta \pm a^2 \sin^2\theta} \tag{22}$$

eller

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} \pm \frac{\sin^2\theta}{b^2}. \tag{23}$$

Sætte vi $\theta + \frac{\pi}{2}$ for θ, faa vi

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{\sin^2\theta}{a^2} \pm \frac{\cos^2\theta}{b^2},$$

altsaa

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2}, \tag{24}$$

der viser, at Summen af Kvadraterne af de reciproke Værdier af to paa hinanden vinkelrette Halvdiametre er konstant.

Særlig mærkes Keglesnittets polære Ligning, naar Brændpunktet er Pol. For Parablen har man som bekjendt, idet r er Brændstraalen,

$$r = x + \frac{p}{4}$$

eller, naar Begyndelsespunktet flyttes til Brændpunktet,

$$r = x + \frac{p}{2} = r \cos\theta + \frac{p}{2},$$

hvoraf

$$r = \frac{\frac{p}{2}}{1 - \cos\theta}. \qquad (25)$$

For Ellipsen har man, naar Begyndelsespunktet flyttes til et af Brændpunkterne,

$$r = a \mp e(x \pm ea) = a(1 - e^2) \mp er \cos\theta,$$

hvoraf

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos\theta} = \frac{\frac{p}{2}}{1 \pm e \cos\theta}. \qquad (26)$$

Ved disse Formler er dog at mærke, at de kun give een Værdi af r for hver Værdi af θ, saa at vi, for at faa alle Kurvens Punkter, maa lade θ variere fra 0 til 2π, medens vi i Almindelighed ved polære Ligninger for algebraiske Kurver faa alle Kurvens Punkter bestemte, naar vi lade θ variere fra 0 til π. Dersom vi, i Stedet for at benytte Udtrykket for Brændstraalen, paa sædvanlig Maade ændre Parablens eller Ellipsens Ligning, faa vi en Ligning af 2den Grad i r, men denne Ligning kan løses rationalt, og i (25) og (26) have vi kun benyttet den positive Værdi af r.

For Hyperblen faa vi, naar vi for Brændstraalerne benytte Udtrykkene $ex + a$ og $ex - a$,

$$r = \frac{\mp\frac{p}{2}}{1 - e \cos\theta}. \qquad (27)$$

Vi kunne derfor som den almindelige Form for Keglesnittenes polære Ligning tage

$$r = \frac{\frac{p}{2}}{1 - e \cos\theta}, \qquad (28)$$

idet vi i alle Tilfælde have beholdt Axens sædvanlige positive Retning og taget det Brændpunkt F som Pol,

for hvilket AF er positiv, naar A er det nærmeste Toppunkt.

13. En Korde drejer sig om et Brændpunkt i et Keglesnit; find det geometriske Sted for det Punkt, der er harmonisk forbundet med Brændpunktet med Hensyn til Kordens Endepunkter.

14. Paa Radius vektor OA til en Cirkel afsættes et Punkt a, saa at $OA . Oa = k^2$; find det geometriske Sted for a.

15. Hvilken Ligning har Kurven
$$r = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$$
i retvinklede Koordinater?

14. Spiraler. Nogle transcendente Kurver (Kurver, hvis Ligninger i Parallelkoordinater ikke ere algebraiske) have polære Ligninger med en særlig simpel Form. Særligt mærkes Archimedes Spiral med Ligningen $r = a\theta$, den hyperbolske Spiral med Ligningen $r\theta = a$, Lituus med Ligningen $r^2\theta = a^2$ og den logarithmiske Spiral med Ligningen $r = ae^{\frac{\theta}{v}}$. Disse Kurvers Former findes let ved en Betragtning af deres Ligninger.

Archimedes Spiral, $r = a\theta$, har $r = 0$ for $\theta = 0$, $r = 2a\pi$ for $\theta = 2\pi$, $r = 4a\pi$ for $\theta = 4\pi$ o. s. v.; den snoer sig altsaa spiralformig fra Polen, saaledes at r for hver Omdrejning bliver $2a$ større; for negative Værdier af θ faas de samme Værdier af r med modsatte Fortegn; den hertil svarende Gren af Kurven ligger, med Hensyn til en Linie gjennem Polen, vinkelret paa Axen, symmetrisk med den Gren, der bestemmes ved positive Værdier af θ.

Den hyperbolske Spiral, $r\theta = a$, faar i Polen et saakaldet Asymptotepunkt, idet man kun kan faa $r = 0$ for $\theta = \infty$; begge dens symmetriske Grene faa desuden en Linie, parallel med Axen i Afstanden a, til Asymptote. Et Punkts Afstand fra Axen er nemlig $r \sin \theta$, der, naar θ nærmer sig til Nul, nærmer sig til $r\theta$ eller a.

Lituus, $r^2\theta = a$, har ligeledes et Asymptotepunkt i Polen, men dens to Grene faa selve Axen til Asymptote (da $r\theta = \frac{a}{r}$ aftager mod Nul med θ) og ligge ikke symmetrisk om den paa Axen vinkelrette Linie.

Den logarithmiske Spiral,

$$r = ae^{\frac{\theta}{v}},$$

har ogsaa et Asymptotepunkt i Polen, idet $r = 0$ for $\theta = -\infty$. Det er en Kurve med mange mærkelige Egenskaber, af hvilke især den er karakteristisk, at logarithmiske Spiraler, som ere ligedannede, ogsaa ere kongruente. De to Spiraler

$$r = ae^{\frac{\theta}{v}} \quad \text{og} \quad r = mae^{\frac{\theta}{v}}$$

ere nemlig ligedannede i Forholdet m; dreje vi den sidste en Vinkel α om Polen, faar den Ligningen

$$r = mae^{\frac{\theta+\alpha}{v}} = mae^{\frac{\alpha}{v}}e^{\frac{\theta}{v}}$$

og falder altsaa sammen med den første, naar α bestemmes saaledes, at

$$me^{\frac{\alpha}{v}} = 1.$$

Man kan altsaa dreje en logarithmisk Spiral om Polen og samtidig lade den voxe i

et saadant Forhold, at den vedbliver at dække sig selv; af denne Egenskab kan udledes mange andre; vi skulle blot nævne, at en Tangents Vinkel med Radius vektor er konstant, at Buer, der ses under samme Vinkel fra Polen, forholde sig som to af Radierne til deres Endepunkter og, at Polen beskriver en ret Linie, naar Spiralen ruller hen ad en ret Linie.

§ 3. Liniekoordinater.

15. Den rette Linie er ligesom Punktet bestemt ved to Størrelser, som vi kunne kalde Liniens Koordinater; de kunne vælges paa forskjellig Maade; her ville vi som Liniens Koordinater u og v tage

$$u = -\frac{1}{p}; \quad v = -\frac{1}{q}, \qquad (29)$$

idet den rette Linies Ligning er

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

der nu bliver

$$ux + vy + 1 = 0. \qquad (30)$$

Denne Ligning udtrykker altsaa, at Punktet (x, y) ligger paa Linien (u, v); ere u og v konstante, er den Ligning for den rette Linie (u, v); ere x og y konstante, siges den at være Ligning for Punktet (x, y), idet alle de Linier, hvis Koordinater u og v tilfredsstille Ligningen, gaa gjennem Punktet. I Almindelighed bliver

$$au + bv + c = 0$$

Ligningen for Punktet $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$, ligesom $ax + by + c = 0$ er Ligningen for Linien $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$.

En Ligning mellem u og v bestemmer et Liniesystem, ligesom en Ligning mellem x og y bestemmer et Punktsystem (en Kurve). Alle Linier i et Liniesystem røre en vis Kurve; Liniesystemet opfattes bedst som bestaaende af alle denne Kurves Tangenter; man siger derfor i Almindelighed Kurvens Ligning i Stedet for Liniesystemets Ligning. Er Ligningen lineær, have vi set, at Kurven reduceres til et Punkt.

16. Der er visse Overensstemmelser ved de to Koordinatsystemer, som man vil se det ved at betragte følgende sideordnede Sætninger:

Et Punkt hører til et Punktsystem (ligger paa en Kurve), naar dets Koordinater tilfredsstille Punktsystemets (Kurvens) Ligning.	En Linie hører til et Liniesystem (er Tangent til en Kurve), naar dens Koordinater tilfredsstille Liniesystemets (Kurvens) Ligning.
De fælles Punkter for to Punktsystemer (Kurvernes Skjæringspunkter) bestemmes, idet man søger x og y af Kurvernes Ligninger.	De fælles Linier for to Liniesystemer (Kurvernes fælles Tangenter) bestemmes, idet man søger u og v af Kurvernes Ligninger.
En Kurve, hvis Ligning i x og y er af $n$te Grad, har n Skjæringspunkter med en vilkaarlig ret Linie.	En Kurve, hvis Ligning i u og v er af $n$te Grad, har n Tangenter gjennem et vilkaarligt Punkt.
Ligningen for en Linie gjennem (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.	Ligningen for Skjæringspunktet af Linierne (u_1, v_1) og (u_2, v_2) er $\frac{v - v_1}{v_2 - v_1} = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1}$.

Eliminere vi x og y mellem Ligningerne for tre rette Linier, finde vi Betingelsen for, at de tre Linier gaa gjennem samme Punkt.

$A - kB = 0$ er Ligningen for en Kurve, der gaar gjennem Skjæringspunkterne for $A = 0$ og $B = 0$.

Særligt mærkes, at dersom $A = 0$ og $B = 0$ ere to rette Linier, bliver $A - kB = 0$ den fælles Ligning for Linier gjennem deres Skjæringspunkt.

Eliminere vi u og v mellem Ligningerne for tre Punkter, finde vi Betingelsen for, at de tre Punkter ligge paa en ret Linie.

$A - kB = 0$ er Ligningen for en Kurve, der rører Fællestangenterne til $A = 0$ og $B = 0$.

Særligt mærkes, at dersom $A = 0$ og $B = 0$ ere to Punkter, bliver $A - kB = 0$ den fælles Ligning for Punkter paa deres Forbindelseslinie.

Exp. 1. Afstanden fra Linien

$$ux + vy + 1 = 0$$

til Punktet (a, b) er

$$\frac{ua + vb + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

$$(ua + vb + 1)^2 = (u^2 + v^2) r^2$$

er derfor Ligningen for Cirklen med Radius r og Centrum (a, b), naar man benytter Liniekoordinater.

Exp. 2. Keglesnittet

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

har Tangenten

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1, \quad \text{idet} \quad \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Heraf faas $u = -\frac{x_1}{a^2}$, $v = \mp \frac{y_1}{b^2}$; indsættes x_1 og y_1 heraf i den anden Ligning, finder man Keglesnittets Ligning i Liniekoordinater

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1.$$

Exp. 3. Paa Forbindelseslinien af Punkterne

$$x_0u + y_0v + 1 = 0 \quad \text{og} \quad x_1u + y_1v + 1 = 0$$

ligger Punktet

$$x_0u + y_0v + 1 - \lambda(x_1u + y_1v + 1) = 0,$$

der deler Afstanden mellem de to Punkter i Forholdet λ. De tre Punkter ere nemlig (x_0, y_0), (x_1, y_1), $\left(\frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda}, \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda}\right)$.

17. En Kurve siges at være af $n$te Orden, naar den skjæres af en vilkaarlig Linie i n Punkter, den siges at være af $n$te Klasse, naar den har n Tangenter gjennem et vilkaarligt Punkt. Kurver af $n$te Orden have derfor Ligninger af $n$te Grad i x og y, medens Kurver af $n$te Klasse have Ligninger af $n$te Grad i u og v. Da Keglesnittene have to Skjæringspunkter med en ret Linie og to Tangenter gjennem samme Punkt, ere de baade af 2den Orden og af 2den Klasse. I Almindelighed er imidlertid en Kurves Orden og dens Klasse forskjellige Tal.

En Ligning af 2den Grad kan dele sig i to Ligninger af første Grad; vi faa herved Keglesnittet som sammensat af to rette Linier, dersom dets Ligning i x og y deler sig, men som sammensat af to Punkter, dersom dets Ligning i u og v deler sig. Et Punkt kan ikke fremstilles ved en Ligning i x og y, ligesom en ret Linie ikke kan fremstilles ved en Ligning i u og v.

§ 4. Dualitetsprincipet.

18. Dersom vi løse en Opgave ved almindelige Punktkoordinater, se vi, at Løsningen falder i tre væsentlig forskjellige Afsnit:

1. Vi udtrykke det Givne ved Ligninger.
2. Ved rent algebraiske Operationer udlede vi af disse Ligninger ny Ligninger.
3. Vi fortolke disse ny Ligninger.

De rent algebraiske Operationer ere her gyldige, uden Hensyn til Betydningen af de anvendte Bogstaver; give vi disse en anden Betydning, kunne dog de samme Endeligninger udledes af de samme givne Ligninger. Tillægge vi derfor de forekommende Tegn ny Betydninger, kunne vi læse ny Sætninger ud af de givne Ligninger og Slutningsligningerne, naar vi fortolke disse overensstemmende med den ny Betydning af Bogstaverne.

Saaledes er det f. Ex. et simpelt algebraisk Faktum, at den almindelige Ligning af 2den Grad med 2 Variable indeholder 5 Konstanter, og at disse kunne findes ved Ligninger af første Grad, dersom man kjender 5 Par sammenhørende Værdier af de Variable, der tilfredsstille Ligningen. Eftersom vi nu betragte de Variable som Punktkoordinater eller som Liniekoordinater, udlede vi heraf:

Der kan tegnes een og kun een Kurve af 2den Orden, der indeholder 5 givne Punkter.	Der kan tegnes een og kun een Kurve af 2den Klasse, der rører 5 givne rette Linier.

19. Denne Methode finder især Anvendelse paa saadanne Sætninger, der kun omhandle deskriptive Egenskaber ved Figurerne, det vil sige saadanne Egen-

skaber, som ikke vedrøre Maalforhold (metriske Egenskaber). Her vise nemlig de under 2 opstillede Sætninger, at vi af en bevist Sætning kunne danne en ny Sætning ved en simpel Ombytning af Ord. Hvor der i den beviste Sætning staar »Punkt«, sætte vi i den ny »ret Linie«, hvor der staar Punkt paa Kurven $f(x, y) = 0$, sætte vi Tangent til Kurven $f(u, v) = 0$, hvor der staar Punkter paa en ret Linie, sætte vi rette Linier gjennem samme Punkt, hvor der staar Skjæringspunkt mellem to rette Linier, sætte vi Forbindelseslinie mellem to Punkter o. s. v.

Dualitetsprincipet rækker imidlerlid endnu videre; for at se dette, ville vi søge det Punkt, hvis Ligning faas, naar vi i Ligningen for en Tangent til Kurven $f(x, y) = 0$ ombytte x og y med u og v.

Tangenten er Forbindelseslinien mellem to Kurvepunkter, der ligge uendelig nær ved hinanden; dertil maa altsaa i det andet System svare Skjæringspunktet af to uendelig nær ved hinanden liggende Tangenter til $f(u, v) = 0$.

Vi anse det her som indlysende, at dette Punkt falder paa Kurven*).

Ligesom der til et Punkt af den første Kurve svarer en Tangent til den anden Kurve, vil der altsaa ogsaa til et Punkt af den anden Kurve svare en Tangent til den første; de to Kurver, der saaledes afhænge af hinanden paa samme Maade, kaldes hinandens reciproke Kurver; dersom den ene Kurve har de to Ligninger

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(u, v) = 0,$$

maa den anden have de to Ligninger

$$\varphi(x, y) = 0, \quad f(u, v) = 0.$$

*) Denne Sætning bevises exact i Enveloppetheorien.

Heraf følger, at dersom vi tage alle Keglesnits reciproke Kurver, faa vi atter alle Keglesnit; en Sætning, der gjælder om alle Keglesnit, omformes derfor ved Dualitetsprincipet til en anden Sætning, som ogsaa gjælder om alle Keglesnit.

Exp. 1. Til Pol og Polar ved et Keglesnit svarer Polar og Pol ved det reciproke Keglesnit. To Tangenter og deres Skjæringspunkt svare nemlig henholdsvis til to af Kurvens Punkter og deres Forbindelseslinie.

Exp. 2. Følgende to Sætninger udledes den ene af den anden:

Dersom en Trekant er omskreven om et Keglesnit, ville de tre Linier, der forbinde Vinkelspidserne med de modstaaende Siders Røringspunkter, skjære hverandre i eet Punkt.

Dersom en Trekant er indskreven i et Keglesnit, ville de tre Skjæringspunkter for en Side og Tangenten til den modstaaende Vinkelspids ligge i samme rette Linie.

20. Vi ville ikke fortsætte disse Undersøgelser videre, da vi senere betragte to Koordinatsystemer, hvor Dualismen strækker sig videre end ved de her undersøgte; vi ville blot endnu antyde, hvorledes man ved Polartheorien kan komme til de samme Resultater som her. Tænke vi os et Punkt gjennemløbende en vis Kurve, vil dets Polar med Hensyn til et fast Keglesnit generere en anden Kurve, og man ser let, at disse to Kurver svare dualistisk til hinanden. Naar Polen gjennemløber en ret Linie, dreier Polaren sig om et fast Punkt, naar Polen gjennemløber et Keglesnit, rører Polaren et Keglesnit,

Skjæringspunktet for to rette Linier har til Polar en Linie, der gaar gjennem de to rette Liniers Poler o. s. v.

Vi ville f. Ex. tænke os, at vi have bevist den første Sætning i Exp. 2 ovenfor. Lad Trekanten ABC være omskreven om Keglesnittet, idet AB rører i c, AC i b, BC i a. Benytte vi selve Keglesnittet som fast Keglesnit, bliver AB Polar til c o. s. v., saa at Keglesnittet bliver sin egen reciproke Kurve. A har til Polar bc, saa at Polen for Aa er Skjæringspunkt for bc og BC; dette og de to analoge Skjæringspunkter ligge i en ret Linie, da de tre Polarer Aa, Bb og Cc gaa gjennem samme Punkt.

Vi have saaledes udledt den anden Sætning af den første og kunne paa samme Maade udlede den første af den anden.

Benytte vi forskjellige faste Keglesnit, faa vi forskjellige Kurver som svarende til en given Kurve; man kan vælge Keglesnittet saaledes, at man ved denne Bestemmelse faar den samme reciproke Kurve som ved den analytiske Bestemmelse ovenfor; dette har imidlertid kun liden Interesse, da de forskjellige, til samme Kurve svarende reciproke Kurver have de samme deskriptive Egenskaber, og det kun er disse, vi undersøge.

16. Find Ligningen i Liniekoordinater for en Hyperbel, hvis Asymptoter tages som Koordinataxer.

17. En ret Linie afskjærer af en Vinkels Ben Stykker med konstant Produkt; find Ligningen i Liniekoordinater for den Kurve, som den rette Linie rører.

18. En Trekant dreier sig, saa at de tre Sider gaa gjennem faste Punkter, medens de to Vinkelspidser gjennemløbe rette Linier; bevis, at den tredie

Vinkelspids beskriver et Keglesnit. Hvilken Sætning svarer dualistisk til denne? Særligt antages de tre Punkter liggende i en ret Linie.

§ 5. Punktrækker og Liniebundter.

21. Punktrækker. Lad O_1, O_2, E og M være fire Punkter paa en ret Linie; Forholdet

$$\frac{O_1M}{O_1E} : \frac{O_2M}{O_2E} = \lambda \qquad (31)$$

er da et rent Tal, der alene afhænger af Punkternes indbyrdes Beliggenhed; det er altsaa uafhængigt af Begyndelsespunktets Beliggenhed, dersom vi vælge et saadant og udtrykke λ ved Punkternes Abscisser. λ kaldes de fire Punkters Dobbeltforhold eller anharmoniske Forhold*). Er $\lambda = -1$, ligge de fire Punkter harmonisk. Det nævnte Forhold ville vi betegne ved

$$\lambda = (O_1 O_2 EM). \qquad (32)$$

22. Tænke vi os O_1 og O_2 (Grundpunkterne) samt E (Enhedspunktet) fastliggende, medens M bevæger sig, vil der til hver Stilling af M svare en Værdi af λ og omvendt; af særlige Stillinger mærkes:

$\lambda = 0$; M falder i O_1.

$\lambda = \pm\infty$; M falder i O_2.

---

*) Punkterne benyttes ved Dannelsen af Dobbeltforholdet paa en bestemt Maade; ved Ombytning af Punkterne faas for de 4 Punkter 6 Dobbeltforhold, nemlig λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{\lambda-1}{\lambda}$ og $\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

$\lambda = +1$; M falder i E.

$\lambda = -1$, M falder i et Punkt E_1, harmonisk forbundet med E, med Hensyn til O_1 og O_2.

Vi se altsaa, at, idet λ gaar fra $-\infty$ til $+\infty$, gaar M fra O_2 over E_1 til O_1 og derfra videre over E til O_2. For $\lambda = O_2E : O_1E$ falder M uendelig fjernt; da dette kun er Tilfældet for denne ene Værdi af λ, sige vi, at en ret Linie kun har eet uendelig fjernt Punkt.

23. Lad Ligningerne for to Punkter O_1 og O_2 være

$$P = a_1u + b_1v + c_1 = 0;\quad Q = a_2u + b_2v + c_2 = 0. \qquad (33)$$

Punktet M med Ligningen

$$P - \lambda Q = 0 \qquad (34)$$

ligger da paa Linien O_1O_2. For $\lambda = 1$ faa vi et Punkt E med Ligningen

$$P - Q = 0. \qquad (35)$$

Dette Punkt er ikke bestemt, fordi de to Punkter O_1 og O_2 ere givne, idet det afhænger af den tilfældige Form af deres Ligninger, der kunne multipliceres med vilkaarlige Faktorer. Vi ville søge den geometriske Betydning af Størrelsen λ. Vi have nu (16, Exp. 3)

$$O_1M : O_2M = \frac{c_2}{c_1}\lambda$$

og for $\lambda = 1$

$$O_1E : O_2E = \frac{c_2}{c_1},$$

hvoraf

$$\frac{O_1M}{O_1E} : \frac{O_2M}{O_2E} = (O_1O_2EM) = \lambda.$$

λ er altsaa Dobbeltforholdet mellem Punkterne O_1, O_2, E og M. Vi se derfor, at et Punkt, hvis Ligning kan skrives $P - \lambda Q = 0$, hvor P og Q ere lineære Funktioner af u og v, har Dobbelt-

forholdet λ til de Punkter, der bestemmes ved $\lambda = 0$, ∞ og 1.

Særligt mærke vi os, at 4 Punkter ligge harmonisk, dersom deres Ligninger kunne skrives

$$P = 0; \quad Q = 0; \quad P - Q = 0; \quad P + Q = 0. \quad (36)$$

24. Dobbeltforholdet mellem de 4 Punkter M_1, M_2, M_3 og M_4 med Ligningerne

$$P - \lambda_1 Q = 0, \quad P - \lambda_2 Q = 0, \quad P - \lambda_3 Q = 0, \quad P - \lambda_4 Q = 0$$

er

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}. \qquad (37)$$

Det Punkt N, der bestemmes ved Ligningen

$$(\lambda_3 - \lambda_2)(P - \lambda_1 Q) - \mu(\lambda_3 - \lambda_1)(P - \lambda_2 Q) = 0$$

falder for $\mu = 0$ i M_1, for $\mu = \infty$ i M_2 og for $\mu = 1$ i M_3; man har altsaa ifølge 23

$$\mu = (M_1 M_2 M_3 N).$$

Skal N falde i M_4, maa man have

$$\lambda_4 = \frac{\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_2) - \mu\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_3 - \lambda_2 - \mu(\lambda_3 - \lambda_1)},$$

hvoraf

$$\mu = (M_1 M_2 M_3 M_4) = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

25. Liniebundter. Lad $A = 0$ og $B = 0$ være Ligningerne for to rette Linier.

$$A - \lambda B = 0 \qquad (38)$$

er da Ligningen for en Linie M gjennem deres Skjæringspunkt. Lad O_1 og O_2 være de givne Linier (Grundlinierne), medens E (Enhedslinien) er den, der svarer til $\lambda = 1$ (afhængig af Formen af A og B).

Dersom $A = 0$ og $B = 0$ have Normalformen, er λ Forholdet mellem Afstandene fra disse Linier til et Punkt af M; have de ikke Normalformen, bliver λ det

samme Forhold, multipliceret med en vis Konstant k; man har altsaa

$$sin\,(O_1M) : sin\,(O_2M) = k\lambda$$

og for $\lambda = 1$

$$sin\,(O_1E) : sin\,(O_2E) = k,$$

følgelig

$$\frac{sin\,(O_1M)}{sin\,(O_1E)} : \frac{sin\,(O_2M)}{sin\,(O_2E)} = \lambda. \qquad (39)$$

λ, der saaledes kun er afhængig af de fire Liniers indbyrdes Stilling, kaldes deres Dobbeltforhold eller anharmoniske Forhold. Tænkes O_1, O_2 og E faste, vil der til hver Værdi af λ svare een og kun een Linie i Bundtet.

Af særlige Stillinger mærkes:

$\lambda = 0$ eller $A = 0$ bestemmer O_1.

$\lambda = \pm\infty$ eller $B = 0$ bestemmer O_2.

$\lambda = 1$ eller $A - B = 0$ bestemmer E.

$\lambda = -1$ eller $A + B = 0$ bestemmer en Linie E_1, der siges at være harmonisk forbunden med E med Hensyn til O_1 og O_2. Den harmoniske Beliggenhed af 4 Elementer (Punkter eller Linier) bestemmes altsaa baade ved Punktrækker og ved Liniebundter ved Dobbeltforholdet -1. I Liniebundter gives der intet uendelig fjernt Element, naar Liniebundtets Toppunkt ikke selv er uendelig fjernt.

Vi se nu, at idet λ gaar fra $-\infty$ til $+\infty$, drejer M sig ud fra O_2 over E_1 til O_1 og derfra over E til O_2.

Vi betegne det anharmoniske Forhold ved Linier paa samme Maade som ved Punkter; undertiden betegne vi Linierne ved OO_1, OO_2, OE og OM og skrive da Dobbeltforholdet $O(O_1O_2EM)$.

26. Dersom man fra et vilkaarligt Punkt O

trækker Linier til fire vilkaarlige Punkter af en ret Linie O_1, O_2, E og M, vil de fire Liniers Dobbeltforhold være det samme som de fire Punkters Dobbeltforhold.

Man har nemlig

$$\frac{O_1M}{O_1E} = \frac{\triangle\, O_1OM}{\triangle\, O_1OE} = \frac{OO_1 \,.\, OM \sin(O_1M)}{OO_1 \,.\, OE \sin(O_1E)}$$

og den analoge Ligning, der faas ved for O_1 at sætte O_2. Division af disse Ligninger viser, at de to Dobbeltforhold ere lige store.

Denne Sætning er af overordentlig Vigtighed, idet det er den, der danner Grundlaget for den nyere Geometri. Dersom vi skjære Liniebundtet med en anden Transversal, bestemmer det paa denne Punkter, der have det samme Dobbeltforhold som Linierne og derfor ogsaa som de givne Punkter. De to Systemer af Punkter ere perspektiviske Projektioner af hinanden, idet O er Projektionscentret. Sætningen viser altsaa, at Dobbeltforholdene paa en Linie og følgelig ogsaa Dobbeltforholdene i et Liniebundt ikke forandres ved perspektivisk Projektion; den sætter os derved istand til, ved Betragtning af disse Dobbeltforhold, at udlede Sætninger om en Figur af andre bekjendte Sætninger om denne Figurs Projektion. Saaledes kunne Sætninger om Keglesnittene udledes af Sætninger om Cirklen, da et Keglesnit altid kan opfattes som perspektivisk Projektion af en Cirkel, idet det kan lægges paa en cirkulær Kegle.

19. Hvilken Linie er, med Hensyn til to Sider af en Trekant, harmonisk forbunden med Medianen og hvilken med Vinklens Halveringslinie?

20. Til et Punkt O af en Cirkelperiferi trækkes Tangenten OA og Korden OM, der er Polar til A.

Gjennem A trækkes en vilkaarlig Sekant, der skjærer Cirklen i B og C. Bevis, at OB og OC ere harmonisk forbundne med OA og OM. Bevis dernæst, at Sætningen gjælder om ethvert Keglesnit.

27. De fire vilkaarlige Linier af ét Liniebundt, M_1, M_2, M_3 og M_4, der bestemmes ved Parameterne*) λ_1, λ_2, λ_3 og λ_4, have Dobbeltforholdet

$$(M_1M_2M_3M_4) = \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} : \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2}. \qquad (40)$$

Skjære vi nemlig Liniebundtet med en vilkaarlig ret Linie og tage vi Skjæringspunkterne med Linierne O_1, O_2 og E som O_1, O_2 og E for Rækken af Skjæringspunkter, bestemmes enhver Linie M med den samme Værdi af λ som dens Skjæringspunkt M; de fire Linier M_1, M_2, M_3 og M_4 have imidlertid det samme Dobbeltforhold som de fire Punkter M_1, M_2, M_3 og M_4, (26), og Sætningen følger derfor af 24.

28. Projektiviske og perspektiviske Punktrækker og Liniebundter. To Punktrækker eller to Liniebundter eller et Liniebundt og en Punktrække kunne tænkes at svare til hinanden Element for Element; dersom der da er det samme Dobbeltforhold mellem fire Elementer af det ene System som mellem de fire tilsvarende Elementer af det andet System, siges de to Systemer at være projektiviske (homografiske).

To projektiviske Punktrækker kunne flyttes saaledes, at de blive perspektiviske, ɔ: at den ene Række fremkommer som Projektion af den anden.

---

*) Parametre kaldes saadanne Konstanter, hvis forskjellige Værdier bestemme de forskjellige Elementer af et System.

Lad A, B og C være Punkter af den ene, A_1, B_1 og C_1 de tilsvarende Punkter af den anden Række. De to Punktrækker lægges, saa at A_1 falder i A. Linierne BB_1 og CC_1 skjære da hinanden i et Punkt O, der vil være Projektionscentret. Lad nemlig en vilkaarlig Linie gjennem O skjære de to Punktrækker i D og D_1. Men har da ifølge 26

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1),$$

og D_1 er derfor det til D svarende Punkt.

To projektiviske Punktrækker ligge altsaa perspektivisk, naar deres Skjæringspunkt er sit eget tilsvarende Punkt.

Paa lignende Maade bevises let følgende to Sætninger.

En Punktrække kan lægges paa et dermed projektivisk Liniebundt, saa at hvert Punkt falder paa sin tilsvarende Straale.

To projektiviske Liniebundter kunne lægges perspektivisk, det vil sige saaledes, at de korresponderende Straalers Skjæringspunkter falde i en ret Linie. Toppunkternes Forbindelseslinie er da sin egen tilsvarende Linie.

Man ser heraf, at Projektiviteten er bestemt ved tre Par sammenhørende Elementer. Man kan saaledes i to Punktrækker tage tre Punkter vilkaarligt af hver Række og lade disse parvis svare til hinanden; skulle de to Punktrækker være projektiviske, er derved bestemt, hvorledes de andre Punkter parvis svare til hinanden, og et Par saadanne Punkter ville bestemmes ved samme Værdi af λ, dersom de tre Par tages som Grundpunkter og Enhedspunkter i de to Rækker.

29. **Involution.** Dersom vi have to projektiviske

Punktrækker paa den samme Linie, maa der mellem et Punkt λ af den ene Række og det tilsvarende Punkt μ af den anden Række existere en Relation af Formen

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0, \tag{41}$$

thi denne Form er den mest almindelige, som en Ligning kan have, der kun skal bestemme een Værdi af μ for hver Værdi af λ og omvendt. Man kan ogsaa vise dette saaledes: Lad Punkterne 0, ∞, 1, λ af den ene Række svare til Punkter af den anden Række, der, henførte til 0, ∞, 1, bestemmes ved Dobbeltforholdene a, b, c og μ; vi have da

$$\lambda = \frac{\mu - a}{c - a} : \frac{\mu - b}{c - b}, \tag{42}$$

der har den angivne Form med tre vilkaarlige Konstanter, der uafhængig af hinanden kunne antage alle Værdier fra $-\infty$ til $+\infty$. Man udtrykker dette ved at sige, at der er ∞^3 Punktrækker*) der ere projektiviske med en given Punktrække. Omvendt indser man, at enhver Ligning af denne Form bestemmer to projektiviske Punktrækker, thi ved saadanne have vi tre Størrelser at disponere over, og Ligningen har kun tre Konstanter.

30. I to projektiviske Punktrækker findes to **Dobbeltpunkter**, det vil sige to saadanne reelle eller imaginære Punkter, der falde sammen med deres tilsvarende Punkter. Sætte vi nemlig i (42)

$$\lambda = \mu = x,$$

faa vi disse Punkter bestemte ved en kvadratisk Ligning.

Da Ligningen (42) er usymmetrisk, vil i Almindelighed et Punkt af Linien have forskjellige tilsvarende Punkter, eftersom det betragtes som henhørende til den første

*) Et System med n Parametre har altsaa ∞^n Elementer.

eller den anden Punktrække. Dersom (42) derimod kan gives Formen

$$k\lambda\mu + l(\mu + \lambda) + m = 0, \qquad (43)$$

vil et Punkt have det samme tilsvarende (konjugerede) Punkt, hvad enten det betragtes som henhørende til den ene eller den anden Punktrække. I dette Tilfælde siges de to Punktrækker at danne en Involution. Denne er bestemt ved to sammenhørende Punktpar, da Ligningen indeholder 2 Konstanter.

Involutionens Centrum er det Punkt, hvis konjugerede Punkt er det uendelig fjerne Punkt. Det bestemmes altsaa ved (43), naar det uendelig fjerne Punkts Parameter er bekjendt.

Lad nu A og B have de konjugerede Punkter A' og B', medens O er Centrum; vi have da, idet ∞ betegner det uendelig fjerne Punkt

$$(ABO\,\infty) = (A'B'\,\infty\,O),$$

hvoraf følger

$$OA\,.\,OA' = OB\,.\,OB',$$

der viser, at to konjugerede Punkters Afstande fra Centrum have konstant Produkt.

Heraf udledes en simpel Konstruktion af Centrum, naar to Punktpar ere givne. Centrum maa nemlig ligge paa Fælleskorden (Radikalaxen) for to Cirkler, der hver gaar gjennem sit Par konjugerede Punkter.

Involutionens Brændpunkter ere dens Dobbeltpunkter; er O Centrum, A og A' et Par konjugerede Punkter, F og F_1 Brændpunkterne, bestemmes disse ved Ligningen

$$OF^2 = OF_1^2 = OA\,.\,OA'$$

der viser, at de ligge ligelangt fra Centrum; have OA og OA' forskjellige Fortegn, ere Brændpunkterne imaginære.

31. Linien FF_1 deles harmonisk af to konjugerede Punkter; man har nemlig, naar A og A' ere et Par konjugerede Punkter

$$(AFF_1A') = (A'FF_1A),$$

hvoraf

$$\frac{FA}{FA'} = -\frac{F_1A}{F_1A'}.$$

Dersom det ene Brændpunkt er uendelig fjernt, er ogsaa Centrum uendelig fjernt, og to konjugerede Punkter ligge lige langt fra det andet Brændpunkt.

32. To Liniebundter med samme Toppunkt siges at danne en Involution, dersom de skjære en vilkaarlig Transversal i Punkter, der danne en Involution.

Exp. 1. Dersom en given Vinkel drejer sig om sit Toppunkt, bestemme Benenes Skjæringspunkter med en vilkaarlig Linie to projektiviske Punktrækker, der danne en Involution, dersom Vinklen er ret; til eet Punkt af den ene Række svarer nemlig eet Punkt af den anden Række, og dersom Vinklen er ret, kunne de to Punkter ombyttes.

Exp. 2. Paa en given Linie skal findes to Punkter A og B, saaledes, at AB ses fra to givne Punkter C og D under givne Vinkler.

Vælges A vilkaarligt, trækkes derfra Linier til C og D og afsættes de givne Vinkler, bestemme disses Ben to projektiviske Punktrækker paa den givne Linie. Disses Dobbeltpunkter bestemme B.

21. Til et Punkt af et Keglesnit trækkes Tangent og Normal; bevis, at disses Skjæringspunkter med Axen bestemme to Punktrækker i Involution, og at Involutionens Brændpunkter falde sammen med Keglesnittets. Specielt undersøges Parablen.

22. En Trekant, ligedannet med en given, bevæger sig med sine Vinkelspidser paa tre givne rette Linier; bevis, at Vinkelspidserne paa disse bestemme projektiviske Punktrækker.

33. **Udvidelse af Dualitetsprincipet.** Til fire Punkter af en Punktrække svare dualistisk de fire Linier af et Liniebundt, som vi faa ved at ombytte Punktkoordinater og Liniekoordinater. De fire Linier og de fire Punkter have samme Dobbeltforhold, thi disse dannes i begge Tilfælde paa samme Maade af de i Ligningerne indgaaende Konstanter, og disse forandres ikke ved Ombytningen.

Denne Sætning tillader os at anvende Dualitetsprincipet paa saadanne Sætninger, der, foruden deskriptive Egenskaber, tillige omhandle saadanne metriske Egenskaber, der kunne udtrykkes ved Dobbeltforhold. Vi ville give nogle Exempler herpaa.

En Korde i et Keglesnit deles harmonisk af et af dens Punkter og Skjæringspunktet med dettes Polar.

To Tangenter fra et Punkt til et Keglesnit ere harmonisk forbundne med en Linie gjennem Punktet og dettes Forbindelseslinie med Liniens Pol.

Fra et givet Punkt A trækkes Linier til et Keglesnit, og paa hver af disse bestemmes det Punkt, der er harmonisk forbundet med A med Hensyn til Liniens Skjæringspunkter med Kurven; Punktets geo-

Fra et Punkt paa en given ret Linie trækkes Tangenter til et Keglesnit, og for hvert Par af disse bestemmes den Linie, der med Hensyn til dem er harmonisk forbundet med den givne Linie; de saaledes

metriske Sted er da en ret Linie, Polaren til A.

bestemte Linier gaa alle gjennem et fast Punkt, den givne Linies Pol.

34. Den firsidede Figur. Man ser let, at man altid kan multiplicere Ligningerne for fire vilkaarlige rette Linier med saadanne Tal, at man ved Ligningernes Addition faar en Identitet; man kan altsaa altid skrive de fire Liniers Ligninger saaledes

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ D = 0,$$

at

$$A + B + C + D \equiv 0,$$

hvor vi bruge Tegnet $\equiv$ for Identitet.

Lad A, B, C, D betegne Linierne, AB, AC . . . deres Skjæringspunkter, (AB) (CD) Forbindelseslinien af AB og CD, saa at denne Linie og (AD) (BC) ere de to Diagonaler. (AC) (BD) er da den saakaldte tredie Diagonal.

Man har nu

$A + B \equiv -(C + D) = 0$ Ligning for (AB) (CD)
$A + D \equiv -(B + C) = 0$ Ligning for (AD) (BC),
$A + C \equiv -(B + D) = 0$ Ligning for (AC) (BD),
$A - B \equiv (A + C) - (B + C) = 0$ Ligning for
(AB) $((AC)(BD))$ $((AD)(BC))$.

De fire Linier

$$A = 0,\ B = 0,\ A - B = 0,\ A + B = 0,$$

ligge harmonisk; deres Skjæringspunkter med (AD) (BC) ligge da ogsaa harmonisk; disse Punkter ere Liniens Skjæringspunkter med

$$A,\ (AB)\,(CD),\ B \text{ og } (AC)\,(BD).$$

Den hermed dualistisk forbundne Sætning kan skrives paa samme Maade, naar vi lade A, B, C, D være fire Punkter, AB, BC . . . deres Forbindelseslinier o. s. v.

Man ser da, at de fire Linier ligge harmonisk, som forbinde Punktet $(AD)(BC)$ med de fire Punkter

$$A,\ (AB)(CD),\ B,\ (AC)(BD).$$

Man har altsaa

I en firsidet Figur deles enhver af Diagonalerne harmonisk af de to andre.

I en Firkant ligge de to modstaaende Sider, den ene Diagonal og Linien til de to andres Skjæringspunkt harmonisk.

§ 6. Dobbeltforhold ved Keglesnittene.

35. Det geometriske Sted for Skjæringspunkterne af korresponderende Straaler i to projektiviske Liniebundter er et Keglesnit gjennem Bundternes Toppunkter.

Det geometriske Sted for Linier, der forbinde korresponderende Punkter i to projektiviske Punktrækker, er et Keglesnit, der rører de to Linier, som bære Punktrækkerne.

Vi ville bevise den første Sætning; lad Ligningerne for de to Straalebundter, henførte til tre Par korresponderende Elementer, være

$$A - \lambda B = 0; \ A_1 - \lambda B_1 = 0.$$

Elimination af λ giver den søgte Ligning

$$AB_1 - A_1B = 0,$$

der tilhører et Keglesnit gjennem de to Bundters Toppunkter.

Man kan ogsaa udtrykke de her beviste Sætninger saaledes:

Dersom fire faste Punkter af et Keglesnit forbindes med et femte Punkt, er de fire Liniers Dobbeltforhold konstant.

Fire faste Tangenter til et Keglesnit skjære en bevægelig Tangent i fire Punkter med konstant Dobbeltforhold.

Af disse Sætninger følger en simpel Methode til at finde saa mange Punkter (Tangenter), som man vil af et Keglesnit, naar 5 Punkter (Tangenter) ere givne. To af Punkterne (A og B) vælges som Toppunkter for de projektiviske Liniebundter, hvis tre Par ensliggende Elementer bestemmes ved de tre andre Punkter C, D og E. Paa Linierne CD og DE maa de to Liniebundter bestemme perspektiviske Punktrækker; disse Punktrækkers korresponderende Punkter findes let, idet Perspectivcentret er $(CA)(EB)$ eller $(CB)(AE)$; derved bestemmes da atter de korresponderende Linier i de to Bundter.

36. Pascals og Brianchons Sætninger.

Skjæringspunkterne for de modstaaende Sider af en i et Keglesnit indskreven Sexkant ligge paa en ret Linie.

De Linier, der forbinde de modstaaende Vinkelspidser af en om et Keglesnit omskreven Sexkant, skjære hverandre i samme Punkt.

Lad 1, 2, 3, 4, 5 og 6 være de 6 Vinkelspidser i den Orden de forbindes, naar man gjennemløber Sexkantens Perimeter (deres Orden paa Periferien er ligegyldig). De modstaaende Sidepar ere da

	12	23	34
	45	56	61
med Skjæringspunkterne	I	II	III.

Forbindes 6 og 2 med 1, 3, 4 og 5, faas to Liniebundter, der skjære 34 og 45 i projektiviske Punktrækker, som maa ligge perspektivisk, da de have Elementet 4 fælles (28). De korresponderende Punkters Forbindelseslinier gaa da gjennem samme Punkt, saa at Linien I III gaar gjennem II.

23. Bestem Skjæringspunkterne for en ret Linie og et Keglesnit, givet ved 5 Punkter.

37. De 6 Punkter, i hvilke en ret Linie skjærer et Keglesnit og en indskreven Firkants Sider, ere i Involution.

Lad Linien skjære Keglesnittet i A og A_1, Firkantens ene Par modstaaende Sider i B og B_1, det andet Par i C og C_1. Forbinde vi de to modstaaende Vinkelspidser med A og A_1 faa vi dem som Toppunkter for to Sæt af 4 Linier med ligestore Dobbeltforhold (35); aflæses disse paa AA_1, faa vi

$$(ACBA_1) = (AB_1C_1A_1),$$

men ifølge Definitionen af Dobbeltforhold er

$$(AB_1C_1A_1) = (A_1C_1B_1A),$$

saa at

$$(ACBA_1) = (A_1C_1B_1A),$$

der viser, at dersom vi til A, C og B lade svare henholdsvis A_1, C_1 og B_1, vil til A_1, svare A.

A faar saaledes det samme tilsvarende Punkt, hvad enten det betragtes som hørende til den ene eller til den anden Punktrække, en Egenskab, der karakteriserer Involutionen.

Da Involutionen er bestemt ved Liniens Skjæringspunkter med Firkantens Sider, ser man at: Et System af Keglesnit, der ere omskrevne om samme Firkant, skjærer en vilkaarlig Linie i Punkter, der danne en Involution.

Endvidere ser man, at enhver Linie skjærer en Firkants Sider og Diagonaler i 6 Punkter i Involution, thi Diagonalerne kunne betragtes som et omskrevet Keglesnit.

24. Benyt den sidste Sætning til at bestemme et givet Punkts konjugerede Punkt i en Involution, bestemt ved to Punktpar; særligt anvendes Konstruktionen til Bestemmelse af Involutionens Centrum.

25. Hvilke Sætninger svare dualistisk til de ovenfor beviste?

26. Konstruer et Keglesnit af fire Punkter og en Tangent. Hvormange Løsninger har Opgaven? Hvilken anden Konstruktion udledes heraf ved Dualitetsprincipet?

27. I et Keglesnit trækkes Korderne AB og CD gjennem et fast Punkt; bevis, at, dersom AC indeholder et fast Punkt, gaar BD ogsaa gjennem et fast Punkt.

28. Tre Keglesnit ere omskrevne om samme Firkant; bevis, at en Linie, der rører de to Keglesnit, deles harmonisk af det tredie.

29. To Keglesnit have dobbelt Røring (Røring i to Punkter); bevis, at en Tangent til det ene deles harmonisk af det andet og af Røringskorden.

30. Tre Punktpar have Abscisserne x_1 og x_2, y_1 og y_2, z_1 og z_2; angiv Betingelsen for, at de ere i Involution.

31. Tre Punktpars Abscisser ere bestemte som Rødder i Ligningerne

$$a_1 x^2 + b_1 x + c_1 = 0; \quad a_2 x^2 + b_2 x + c_2 = 0;$$
$$(a_1 - ka_2) x^2 + (b_1 - kb_2) x + c_1 - kc_2 = 0;$$

bevis, at de tre Punktpar ere i Involution.

32. Bestem et Punktpar, der er harmonisk forbundet med to givne Punktpar.

§ 6. Trekantskoordinater.

38. Lad Ligningerne for tre rette Linier, Grundlinierne, der ikke skjære hverandre i eet Punkt, være

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0;$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 \tag{44}$$

eller for Kortheds Skyld

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0. \tag{45}$$

Vi betegne desuden Siderne i den af de tre Linier dannede Trekant, Grundtrekanten, ved x_1, x_2 og x_3, de modstaaende Vinkelspidser, Grundpunkterne, ved X_1, X_2 og X_3. Disses Ligninger findes, naar man indsætter deres Koordinater, fundne af (44) i Ligningen $ux + vy + 1 = 0$; man finder

$$A_1 u + B_1 v + C_1 = 0; \quad A_2 u + B_2 v + C_2 = 0;$$
$$A_3 u + B_3 v + C_3 = 0 \tag{46}$$

eller for Kortheds Skyld

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = 0. \tag{47}$$

A_1, B_1 ... ere her de til a_1, b_1 ... hørende Underdeterminanter i den til Ligningerne (44) hørende Determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Man har altsaa, ifølge bekjendte Sætninger,

$$\left.\begin{array}{l} D = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_2 A_2 + b_2 B_2 + c_2 C_2 \text{ osv.} \\ 0 = a_2 A_1 + b_2 B_1 + c_2 C_1 = a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2 \text{ osv.} \end{array}\right\} \quad (49)$$

De tre Linier

$$x_1 - x_2 = 0; \quad x_2 - x_3 = 0; \quad x_3 - x_1 = 0 \quad (50)$$

skjære hverandre i et Punkt E, Enhedspunktet. Enhedspunktet er ikke bestemt, fordi de tre Grundlinier x_1, x_2 og x_3 ere givne, da det afhænger af Formen af Ligningerne (44); ved et passende Valg af de ubestemte Faktorer i disse Ligninger kan Enhedspunktet bringes til at falde i et hvilketsomhelst Punkt, der ikke ligger paa Grundlinierne. Naar E er bestemst, ere samtidig Linierne gjennem E valgte som Enhedslinier for de tre Liniebundter med Toppunkterne i X_3, X_1 og X_2:

$$x_1 - \lambda x_2 = 0; \quad x_2 - \lambda x_3 = 0; \quad x_3 - \lambda x_1 = 0;$$

vi ville betegne disse Linier ved e_3, e_1 og e_2.

39. Paa de tre Grundlinier falde Punktrækkerne

$$X_1 - \mu X_2 = 0; \quad X_2 - \mu X_3 = 0; \quad X_3 - \mu X_1 = 0;$$

disses Enhedspunkter E_3, E_1 og E_2 med Ligningerne

$$X_1 - X_2 = 0, \quad X_2 - X_3 = 0, \quad X_3 - X_1 = 0 \quad (51)$$

falde i en ret Linie e, Systemets Enhedslinie. Denne Linie er bestemt, naar E er bestemt, da derved Formen af Ligningerne (44) er bestemt.

Punktet E_3 ligger paa Linien $x_1 + x_2 = 0$; dets Ligning er nemlig

$$(A_1 - A_2)u + (B_1 - B_2)v + C_1 - C_2 = 0,$$

og det har derfor Koordinaterne

$$x = \frac{A_1 - A_2}{C_1 - C_2}; \quad y = \frac{B_1 - B_2}{C_1 - C_2};$$

indsættes disse i $x_1 + x_2 = 0$, faar man

$$(a_1 + a_2)(A_1 - A_2) + (b_1 + b_2)(B_1 - B_2)$$
$$+ (c_1 + c_2)(C_1 - C_2) = 0,$$

en Ligning, der, ifølge Ligningerne (49), er identisk.

Liniebundtet $x_1 - \lambda x_2 = 0$ afskjærer altsaa paa x_3 en Punktrække $X_1 - \mu X_2 = 0$, men dennes Enhedspunkt er ikke dens Skjæringspunkt med e_3, men det dermed med Hensyn til X_1 og X_2 harmonisk forbundne Punkt; de fire Punkter ere nemlig Skjæringspunkterne med Linierne

$$x_2 = 0,\ \ x_1 = 0,\ \ x_1 - x_2 = 0 \ \text{ og } \ x_1 + x_2 = 0,$$

som have Ligningerne

$$X_1 = 0,\ \ X_2 = 0,\ \ X_1 + X_2 = 0 \ \text{ og } \ X_1 - X_2 = 0.$$

Man slutter heraf, at Ligningerne for e og E ere henholdsvis

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \text{ og } \ X_1 + X_2 + X_3 = 0,$$

thi Formen af den første Ligning viser, at Linien gaar gjennem Skjæringspunktet af $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = 0$ o. s. v.

Ombytter man i Punktrækken paa x_3 Enhedspunktet med det dermed harmonisk forbundne Punkt, faar den Ligningen

$$X_1 + \mu X_2 = 0,$$

og skriver man denne, idet Grundpunkterne ombyttes,

$$X_2 + \frac{1}{\mu} X_1 = 0,$$

har man til Grundelementer taget Skjæringspunkterne med Grundelementerne af det modstaaende Liniebundt

$$x_1 - \lambda x_2 = 0;$$

man ser heraf, at den ved λ bestemte Linie skjærer x_3 i det ved $-\frac{1}{\mu}$ bestemte Punkt.

Alle de fundne Ligninger ere saadanne, at man blot behøver at ombytte de store og de smaa Bogstaver, for

at gaa over fra en ved disse Ligninger udtrykt Sætning til den dermed dualistisk forbundne Sætning. Man maa lægge Mærke til, at Ombytningen ogsaa strækker sig til de bekjendte Størrelser a_k og A_k o. s. v.

40. Vi have hidtil betragtet x_1, x_2 og x_3, X_1, X_2 og X_3 som forkortede Betegnelser; vi kunne imidlertid tillægge dem en geometrisk Betydning, naar vi vedtage, at vi kun benytte deres Forhold, saa at en konstant Faktor i dem bliver uden Betydning. Vi have nemlig for ethvert Punkt paa Linien

$$x_1 - \lambda x_2 = 0 \quad \text{eller} \quad x_1 : x_2 = \lambda,$$

at λ er Forholdet mellem Punktets Afstande fra x_1 og x_2 divideret med Forholdet mellem E's Afstande fra x_1 og x_2 (25). Vi kunne derfor, naar vi kun benytte Forholdene mellem x_1 og x_2, betragte x_1 og x_2 som Koordinater til et Punkt i Linien, idet Koordinaterne da ere Punktets Afstande fra x_1 og x_2, hver divideret med E's Afstand fra den samme Linie. Ved en analog Betragtning af Ligningen $X_1 - \lambda X_2$ faa vi saaledes:

Et Punkts Koordinater x_1, x_2 og x_3 ere dets Afstande fra Grundlinierne x_1, x_2 og x_3, hver divideret med E's Afstand fra den samme Linie.	En Linies Koordinater X_1, X_2 og X_3 ere dens Afstande fra Grundpunkterne X_1, X_2 og X_3, hver divideret med e's Afstand fra det samme Punkt.

Herved maa, som anført, vel erindres, at man kun tør benytte homogene Ligninger, da det i Virkeligheden er ved to Forhold mellem x_1, x_2 og x_3, at et Punkt bestemmes og ved to Forhold mellem X_1, X_2 og X_3,

at en Linie bestemmes. For at vise den ubestemte Faktor, skriver man derfor Ligningerne (44) og (46)

$$\left.\begin{array}{l|l} \rho x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 & \sigma X_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 \\ \rho x_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 & \sigma X_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 \\ \rho x_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 & \sigma X_3 = A_3 u + B_2 v + C_3 \end{array}\right\} \quad (52)$$

der, løste med Hensyn til x, y, u og v give

$$\left.\begin{array}{l|l} x = \dfrac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} & u = \dfrac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3}{c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3} \\ y = \dfrac{B_1 x_1 + B_2 x_2 + B_3 x_3}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3} & v = \dfrac{b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3}{c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3} \end{array}\right\} \quad (53)$$

Formlerne (52) og (53) tjene til at gjøre Overgangen fra et Trekantskoordinatsystem til et retvinklet og omvendt; deres Form viser, at *en saadan Ændring ikke kan forandre en Lignings Grad*, saa at den rette Linie ogsaa ved Trekantskoordinater er Kurven af første Orden, medens Keglesnittene ere Kurverne af anden Orden og anden Klasse. Man ser tillige af (53), at

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 = 0 \qquad (54)$$

tilfredsstilles af de Punkter, for hvilke $x = \infty$, $y = \infty$. Disse Punkter maa derfor opfattes som liggende paa en ret Linie med denne Ligning.

41. *Ligning for ret Linie og Punkt.* Den Ligning, der udtrykker, at Punktet (x_1, x_2, x_3) ligger paa den rette Linie (X_1, X_2, X_3), findes ved at indsætte x, y, u og v af (53) i Ligningen $ux + vy + 1 = 0$; man faar derved, naar man benytter Ligningerne (49)

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0, \qquad (55)$$

der saaledes er Ligning for den rette Linie eller for Punktet, eftersom man lader det ene eller det andet Sæt Koordinater være konstant. Man ser, at de tidligere fundne Ligninger for E og e ere specielle Tilfælde af (55).

42. Ligningen for to Punkters Forbindelseslinie. Ligningerne

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0$$
$$y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3 = 0$$
$$z_1 X_1 + z_2 X_2 + z_3 X_3 = 0$$

udtrykke, at de tre Punkter med Koordinaterne x, y og z ligge paa Linien (X_1, X_2, X_3); er y og z givne Punkter, bliver derfor Ligningen for deres Forbindelseslinie

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0; \qquad (56)$$

man udtrykker ogsaa dette ved at sætte

$$\begin{aligned} \rho x_1 &= y_1 + \lambda z_1 \\ \rho x_2 &= y_2 + \lambda z_2 \\ \rho x_3 &= y_3 + \lambda z_3, \end{aligned} \qquad (57)$$

idet disse Ligninger ved Elimination af ρ og λ give (56). Herved er et vilkaarligt Punkt af Punktrækken bestemt ved de to givne Punkter og Parametren λ. Den geometriske Betydning af λ ses let, idet Ligningen for Punktet x ved Indsættelse af Koordinaterne findes at være

$$(y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3) + \lambda (z_1 X_1 + z_2 X_2 + z_3 X_3) = 0,$$

der viser, at λ er Punktets Dobbeltforhold til y, z og det til $\lambda = 1$ svarende Punkt (23). Ved Ombytning af de smaa Bogstaver med store faas de analoge Formler for et Liniebundt, bestemt ved to Linier.

43. Til et særligt Parallelkoordinatsystem kunne vi gjøre Overgang ved at lade den ene af Grundlinierne fjerne sig i det Uendelige, medens de to andre tages som Axer for det ny System. For Simpelheds Skyld ville vi antage, at x_1 og x_2 ere vinkelrette paa hinanden, saa at

vi paa denne Maade gjøre Overgang til et retvinklet System.

Lade vi Linien x_3 fjerne sig i det Uendelige, bliver Eorholdet mellem to Punkters Afstande fra denne Linie 1. Man faar altsaa $x_3 = 1$.

Vælge vi Enhedspunktet i Afstanden 1 fra x_1 og x_2, blive x_1 og x_2 de retvinklede Koordinater til Punktet. Overgangen til det retvinklede System sker altsaa simpelthen ved at sætte $x_3 = 1$. Omvendt, dersom man i et retvinklet System for Koordinaterne x_1 og x_2 sætter $\frac{x_1}{x_3}$ og $\frac{x_2}{x_3}$, faar man det Trekantssystem, hvor den tredje Grundlinie $x_3 = 0$ er den uendelig fjerne rette Linie.

Hvad Liniekoordinaterne angaar, se vi let at, idet (X_1, X_2, X_3) skjærer x_1 og x_2 i M_1 og M_2, er $X_2 : X_3 = (X_2 X_3 E_1 M_1)$; $X_1 : X_3 = (X_1 X_3 E_2 M_2)$; disse Forhold gaa imidlertid, naar X_1 og X_2 fjerne sig i det Uendelige, over til $X_3E_1 : X_3M_1$ og $X_3E_2 : X_3M_2$; det vil sige til u og v, idet man let ser, at af den vedtagne Bestemmelse af Enhedsliniens Beliggenhed følger $X_3E_1 = X_3E_2 = -1$. Overgangen til det retvinklede System sker altsaa ved at sætte $X_3 = 1$, og omvendt gaar man over fra dette System til et Trekantssystem med to uendelig fjerne Grundpunkter ved at sætte $X_1 : X_3$ og $X_2 : X_3$ for X_1 og X_2 (u og v).

Exp. Ligningen

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

skrives

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Skjæringen med den uendelig fjerne rette Linie $z = 0$ bestemmes ved

$$ax^2 + by^2 + 2cxy = 0,$$

der viser, at Kurven skjærer den uendelig fjerne Linie i to reelle Punkter, naar $c^2 > ab$ (Hyperblen) i to imaginære Punkter, naar $c^2 < ab$ (Ellipsen) og i to sammenfaldende Punkter, naar $c^2 = ab$ (Parablen).

Parabler ere altsaa Keglesnit, der have den uendelig fjerne rette Linie til Tangent; der kan derfor tegnes een og kun een Parabel, som rører 4 givne rette Linier (18).

44. Overgang fra et Trekantssystem til et andet. Lad Koordinaterne i de to Systemer være henholdsvis y, x, Y og X med Mærkerne 1, 2 og 3.

Gjør man først Overgang til et retvinklet System ved (52) og derpaa til det andet Trekantssystem ved (53) ser man let, at man kommer til Ligninger af Formen

$$\left.\begin{aligned} \rho y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \rho y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ \rho y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (58)$$

hvor a_{ki} er konstant.

Da nu Ligningen

$$x_1 X_1 + x_2 X_2 + x_3 X_3 = 0,$$

paa Grund af sin Betydning, paa en Faktor nær, ved Ændringen maa blive

$$y_1 Y_1 + y_2 Y_2 + y_3 Y_3 = 0,$$

maa man have

$$\left.\begin{aligned} \sigma X_1 &= a_{11} Y_1 + a_{21} Y_2 + a_{31} Y_3 \\ \sigma X_2 &= a_{12} Y_1 + a_{22} Y_2 + a_{32} Y_3 \\ \sigma X_3 &= a_{13} Y_1 + a_{23} Y_2 + a_{33} Y_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (59)$$

Af (58) og (59) findes atter

$$\left.\begin{array}{l|l} \mu x_1 = A_{11}y_1 + A_{21}y_2 + A_{31}y_3 & \nu Y_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + A_{13}X_3 \\ \mu x_2 = A_{12}y_1 + A_{22}y_2 + A_{32}y_3 & \nu Y_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + A_{23}X_3 \\ \mu x_3 = A_{13}y_1 + A_{23}y_2 + A_{33}y_3 & \nu Y_3 = A_{31}X_1 + A_{32}X_2 + A_{33}X_3 \end{array}\right\} (60)$$

hvor A_{ik} betyder den til a_{ik} svarende Underdeterminant i

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (61)$$

Man slutter sig heraf let til den geometriske Betydning af Konstanterne; man har nemlig, at $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ og $y_3 = 0$ ere Ligningerne for de tre Grundlinier i Systemet y, medens $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$ og $Y_3 = 0$ ere Ligningerne for de ny Grundpunkter. (58) viser da, at $y_1 = 0$ i Systemet x har Koordinaterne a_{11}, a_{12} og a_{13}, medens den sidste (60) viser, at $Y_1 = 0$ i Systemet X har Koordinaterne A_{11}, A_{12} og A_{13}. Altsaa:

Dersom man ved den første (60) og ved (59) gjør Overgang fra Systemet x til Systemet y, er i det gamle System Koordinaterne til de ny

$$\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\text{Grundlinier}} & \multicolumn{3}{c}{\text{Grundpunkter}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \Bigg\}; \qquad (62)$$

det ny Enhedspunkt bestemmes ved Valget af de ubestemte Faktorer, der findes i de valgte ny Grundliniers Koordinater i det gamle System. De fundne Formler for Punkt- og Linie-Koordinater ses at svare fuldstændig dualistisk til hinanden.

45. **Lineære Transformationer.** Dersom vi betragte en vilkaarlig Figur, kunne vi af denne danne andre ved saakaldt lineær Transformation; dette sker, idet vi til ethvert Punkt i den givne Figur bestemme et tilsvarende Punkt i den ny Figur saaledes, at dets Koordinater y_1, y_2, y_3 bestemmes ved det givne Punkts Koordinater x_1, x_2, x_3 ved Ligningerne (58), hvor Størrelserne a ere vilkaarlige givne Konstanter.

Dersom man benytter de ved

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

bestemte Linier som Grundlinier for et nyt Koordinatsystem, vil man finde de til den transformerede Figur hørende Ligninger for dette System ved blot at sætte y for x (og Y for X) i de Ligninger, der tilhøre den givne Figur i det oprindelige System. De Sætninger, der gjælde om den givne Figur, maa derfor ogsaa gjælde om den transformerede, forsaavidt de kunne bevises ved Benyttelse af et Trekantssystem, der ikke har nogen speciel Stilling.

Figurer, der saaledes ere dannede af hinanden ved lineære Transformationer kaldes projektiviske eller homografiske. De karakteriseres ved, at der til ethvert Punkt i den ene svarer et og kun et i den anden, at der til en Kurve i den ene svarer en Kurve af samme Orden og Klasse i den anden og navnlig ved, at alle Dobbeltforhold mellem den ene Figurs Punkter og Linier ere ligestore med de tilsvarende mellem den anden Figurs Punkter og Linier. Disse Dobbeltforhold bestemmes nemlig ved Konstanter, som ere uafhængige af Grundliniernes Beliggenhed, og som ikke kunne forandres ved Ombytningen af x og y.

Sætninger om metriske Forhold kunne vel udledes ved almindelige Trekantskoordinater, men de maa da fremkomme som specielle Tilfælde af Sætninger om Dobbeltforhold, og omvendt kan man, ved at udtrykke en ad speciel Vej bevist Sætning om metriske Forhold ved Hjælp af Dobbeltforhold, udlede en mere almindelig Sætning. Saaledes er det f. Ex. bekjendt, at Midtpunkterne af en firsidet Figurs Diagonaler ligge i en

ret Linie; vi kunne udtrykke dette saaledes: de Punkter af en firsidet Figurs Diagonaler, der, i Forbindelse med deres Skjæringspunkter med den uendelig fjerne rette Linie, dele Diagonalerne harmonisk, ligge selv paa en ret Linie; denne Sætning maa da gjælde, selv om vi for den uendelig fjerne rette Linie sætte en vilkaarlig ret Linie, thi Sætningen maa, da den kun omhandler Beliggenhedsforhold og Dobbeltforhold, kunne bevises ved almindelige Trekantskoordinater, og ved disse er der Intet, der udmærker den uendelig fjerne rette Linie fremfor enhver anden; det er først, naar man vælger en bestemt Grundtrekant, at den uendelig fjerne Linie faar en særlig Betydning.

46. De lineære Transformationer have en bestemt geometrisk Betydning. Homografiske Figurer ere nemlig saadanne, der kunne opfattes som perspektiviske Projektioner af hinanden. For at bevise dette, behøve vi blot at bevise, at fire Punkter af det ene System (af hvilke tre ikke ligge i en ret Linie) kunne lægges saaledes, at de ere Projektioner af de tilsvarende fire Punkter af det andet System; vi vide nemlig, at alle Dobbeltforhold blive uforandrede, baade ved lineær Transformation og ved perspektivisk Projektion, men disse Dobbeltforhold ere bestemte ved de fire Punkter, der kunne tages som Grundpunkter og Enhedspunkter for de to Systemer.

I de to homografiske Systemer tage vi i hvert System den Linie, der svarer til den uendelig fjerne rette Linie i det andet System, og det ene System drejes derpaa i Planen, til de to Linier blive parallele; de skjære da den uendelig fjerne rette Linie i et Punkt, der er sit eget tilsvarende Punkt, da det er Skjæringspunktet for to

4*

Linier af det ene System og for de to tilsvarende Linier af det andet System.

En vilkaarlig Linie gjennem dette Punkt, tilhørende det ene System, har da sin tilsvarende Linie gjennem samme Punkt, eller med andre Ord, de to Linier ere parallele. Lad nu A og B være to Punkter paa den ene Linie, A' og B' de tilsvarende Punkter paa den anden Linie; vi tænke os da det sidste System forandret, ligedannet med sig selv, saa at $A'B' = AB$; lægges derpaa det ændrede System, saa at $A'B'$ dækker AB, ville alle Punkter paa AB falde sammen med deres tilsvarende Punkter (28).

Lad nu C og C', D og D' være to andre Punktpar; CD og $C'D'$ skjære da AB i samme Punkt E. Drejes nu det ene System en vilkaarlig Vinkel om AB, ville CC' og DD' skjære hinanden, da de begge ligge i Planen $CC'E$. Deres Skjæringspunkt O er Perspektivcentret, thi derved projiceres A, B, C' og D' i A, B, C og D, og vi have set, at det er tilstrækkeligt, at betragte 4 Punktpar. Det ene System er imidlertid forandret i Størrelse, men vi kunne ved en Parallelforskydning af dets Plan give Systemet den rigtige Størrelse.

Det Karakteristiske ved Trekantskoordinatsystemet, saalænge det ikke gives en særlig Stilling, er altsaa, at vi ved det behandle alle saadanne Figurer under Et, der ere Centralprojektioner af hinanden. Vi kunne derved kun udlede Sætninger, der gjælde for alle saadanne Figurer, men vi skulle senere se, at ogsaa Egenskaber, der ikke ere projektive, kunne nævnes under en saadan Form, at de falde ind under projektive Egenskaber.

§ 7. Keglesnittene.

47. Den almindelige Ligning for Kurver af anden Orden i Punktkoordinater skrive vi

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2$$
$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (63)$$

Betingelsen for, at Kurven bestaar af to rette Linier (Keglesnit med Dobbeltpunkt), findes ved Anvendelse af den i I, 25 givne Formel, efter at (63) ved Division er bragt paa den der benyttede Form; man finder derved, at Betingelsen kan skrives

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad (64)$$

hvor $a_{ki} = a_{ik}$. D kaldes Ligningens Determinant.

48. Vi ville ikke her gaa ind paa en nærmere Undersøgelse af Keglesnittene ved Trekantskoordinater, men nøjes med at vise Methoden, ved at behandle en enkelt Opgave.

Lad y og z være to Punkter af en ret Linie; et tredie Punkt bestemmes da (42) ved Ligningerne

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + \lambda z_1, \\ x_2 &= y_2 + \lambda z_2, \\ x_3 &= y_3 + \lambda z_3. \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Indsættes disse Udtryk i (63), faas til Bestemmelse af den rette Linies Skjæringspunkter med Keglesnittet en Ligning af Formen

$$\lambda^2 R + 2\lambda Q + P = 0, \qquad (66)$$

hvor de to Værdier af λ, som vi ville betegne ved λ_1 og λ_2, ere de to Dobbeltforhold, der bestemme Skjæringspunkterne (42). $\lambda_1 : \lambda_2$ er da Dobbeltforholdet mellem de givne Punkter og de to Skjæringspunkter.

Vi ville benytte dette Resultat til at bestemme Ligningen for Polaren til Punktet y. Skal z ligge paa Polaren, maa man have $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$ eller

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \text{ hvoraf } Q = 0,$$

altsaa, naar vi erindre Betydningen af Q,

$$z_1 Z_1 + z_2 Z_2 + z_3 Z_3 = 0, \qquad (67)$$

hvor

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3, \\ Z_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3, \\ Z_3 &= a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3. \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

Gaa vi ud fra Polaren som given, finde vi, ved at løse Ligningerne (68), Polen bestemt ved

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A_{11} Z_1 + A_{12} Z_2 + A_{13} Z_3, \\ y_2 &= A_{21} Z_1 + A_{22} Z_2 + A_{23} Z_3, \\ y_3 &= A_{31} Z_1 + A_{32} Z_2 + A_{33} Z_3, \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

hvor vi forudsætte, at D ikke er Nul, og hvor A_{ki} er Underdeterminanten til a_{ki}.

49. Betingelsen for, at Punktet y ligger paa Kurven, er, at det falder paa sin Polar; indsætte vi dets Koordinater i Polarens Ligning, komme vi ogsaa tilbage til den givne Ligning (63) (med y for x).

Betingelsen for, at Polaren Z er Tangent til Kurven, er, at den gaar igjennem sin Pol; indsætte vi derfor Koordinaterne til en Linie (X_1, X_2, X_3) i Ligningen for dens Pol, faa vi Keglesnittets Ligning i Liniekoordinater

$$A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2$$
$$2A_{12} X_1 X_2 + 2A_{13} X_1 X_3 + 2A_{23} X_2 X_3 = 0. \qquad (70)$$

Vi have her forudsat, at D ikke er Nul. For $D = 0$ tilhører (63) et Liniepar, og de to Tangenter, der kunne trækkes gjennem et givet Punkt, blive to sammenfaldende Linier gjennem Linieparrets Dobbelt-

punkt. Da alle Tangenterne saaledes gaa gjennem dette Punkt, maa det bestemmes ved (70), og da denne Ligning er af 2den Grad og ikke kan bestemme noget andet Punkt, maa den antage Formen

$$P^2 = 0,$$

idet $P = 0$ er Dobbeltpunktets Ligning.

Af den almindelige Ligning (70) kan man danne Keglesnittets Ligning i Punktkoordinater og kommer derved tilbage til (63). Er Determinanten til (70) D_1 Nul, deler Kurven sig i et Punktpar og af Dualitetsprincipet følger da, at (63) udledt af (70) i dette Tilfælde maa bestemme den rette Linie, der indeholder Punktparret, to Gange. Man kan ogsaa vise, at $D_1 = D^2$, saa at de to Determinanter samtidig blive Nul; vi ville imidlertid ikke her nærmere undersøge dette, men nøjes med ved Exemplet nedenfor at vise Grunden til den tilsyneladende Selvmodsigelse, der ligger deri, at $D = 0$ bestemmer enten to sammenfaldende Punkter (Linier) eller to Punkter (Linier), der kunne være hvilkesomhelst, eftersom vi betragte en Ligning som udledt af en anden eller som umiddelbart given.

Exp. Ligningen

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

antager, naar den uendelig fjerne Linie har Ligningen $z = 0$, Formen

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

der har Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \quad \text{eller} \quad abc = 0.$$

Underdeterminanterne, der svare til a, b og c, ere bc,

ac og *ab*, hvorved Keglesnittets Ligning i Liniekoordinater bliver

$$bcX_1^2 + acX_2^2 + abX_3^2 = 0.$$

Denne Lignings Determinant er $a^2b^2c^2$. For $c = 0$ tilhører Punktligningen et Liniepar, medens Tangentligningen reduceres til $X_3^2 = 0$, der bestemmer Linieparrets Dobbeltpunkt 2 Gange.

Gaa vi derimod ud fra den sidste Ligning, giver $D_1 = 0$ f. Ex. $ab = 0$, hvorved bestemmes et Punktpar $bcX_1^2 + acX_2^2 = 0$. Forskjellen ligger altsaa i, at $D_1 = 0$ ved den ene Betragtning deler sig i $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; ved den anden i $ab = 0$, $ac = 0$, $bc = 0$.

Paa lignende Maade findes, at Parablen $y^2 = px$ i Liniekoordinater faar Ligningen $pv^2 = 4u$.

50. **Systemer af Keglesnit.** Ligningen

$$S - kS_1 = 0 \tag{71}$$

tilhører det System af ∞^1 Keglesnit, der gaa gjennem Skjæringspunkterne af de faste Keglesnit $S = 0$ og $S_1 = 0$. Ere de faste Keglesnit to Liniepar, bliver Systemets Ligning

$$\alpha\beta - k\gamma\delta = 0, \tag{72}$$

idet α, β, γ og δ ere de fire rette Linier; de fire Punkter, som Keglesnittene gaa igjennem, ere med en let forstaaelig Betegnelse

$$(\alpha, \gamma),\ (\alpha, \delta),\ (\beta, \gamma)\ \text{og}\ (\beta, \delta).$$

Skrives Liniernes Ligninger i retvinklede Koordinater og under Normalform, udtrykker (72), at det geometriske Sted for Punkter, for hvilke Produktet af Afstandene fra det ene Par modstaaende Sider af en Firkant staar i et konstant Forhold til Produktet af Afstandene fra det andet Par

modstaaende Sider, er et Keglesnit, omskrevet om Firkanten.

Dersom man har givet et femte Punkt, som et af Systemets Keglesnit skal gaa igjennem, bestemmes k af (72) eller (71), naar det givne Punkts Koordinater indsættes for de løbende Koordinater i disse Ligninger.

Naar δ og γ falde sammen, faar man

$$\alpha\beta = k\gamma^2,$$

hvor α og β ere to Tangenter og γ er Røringskorden.

Ligningen

$$k\alpha\beta + l\alpha\gamma + m\beta\gamma = 0, \qquad (73)$$

hvor k, l og m ere Konstanter, medens α, β og γ ere tre rette Linier, tilhører et System af ∞^2 Keglesnit, der ere omskrevne om den Trekant, hvis Sider ere α, β og γ. Ligningens Form viser nemlig, at Punkterne (α, β), (α, γ) og (β, γ) ligge paa Kurven, og de to Konstanter kunne bestemmes saaledes, at Kurven gaar gjennem to hvilkesomhelst Punkter.

Ligningen

$$k^2\alpha^2 + l^2\beta^2 + m^2\gamma^2 - 2lm\beta\gamma - 2kl\alpha\beta - 2km\alpha\gamma = 0 \quad (74)$$

tilhører et System af ∞^2 Keglesnit, indskrevne i den Trekant, hvis Sider ere α, β og γ. Ved Skjæring f. Ex. med $\gamma = 0$ faar man nemlig

$$(k\alpha - l\beta)^2 = 0,$$

der viser, at de to Skjæringspunkter falde sammen og ligge paa Linien $k\alpha - l\beta = 0$. Denne Linie gaar desuden gjennem (α, β). Da de analoge Linier have Ligningerne $l\beta - m\gamma = 0$ og $m\gamma - k\alpha = 0$, maa de tre Linier, som forbinde Vinkelspidserne af en Trekant med de modstaaende Siders Røringspunkter med et indskrevet Keglesnit, skjære hverandre i eet Punkt.

Skal det indskrevne Keglesnit gaa gjennem to givne Punkter, bestemmes Forholdene mellem k, l og m ved en Ligning af fjerde Grad; altsaa:

Der gives 4 Keglesnit, som røre tre givne Linier og gaa gjennem to givne Punkter.

Der gives 4 Keglesnit, som gaa gjennem tre givne Punkter og røre to givne Linier.

51. **Særlige Trekantssystemer. Cirkelpunkterne.** Saalænge vort Koordinatsystem er almindeligt, er der Intet, der udmærker særlige Linier eller Keglesnit; ville vi undersøge særlige Keglesnit f. Ex. Cirklen eller undersøge Kurvers Forhold til den uendelig fjerne Linie, maa vi vælge særlige Koordinatsystemer; vi ville her benytte det, som vi gaa over til, naar vi for de retvinklede Koordinater x og y sætte $x:z$ og $y:z$; vi have set, at det (naar vi give Enhedspunktet en særlig Stilling) er et Trekantssystem, hvor de retvinklede Axer og den uendelig fjerne Linie ere de tre Grundlinier.

Ligningen for en Cirkel bliver i dette System

$$x^2 + y^2 + 2axz + 2byz + cz^2 = 0;$$

Skjæringspunkterne med $z = 0$ bestemmes ved

$$x^2 + y^2 = 0$$

eller

$$y + x\sqrt{-1} = 0; \quad y - x\sqrt{-1} = 0. \qquad (75)$$

Vi se heraf, at enhver Cirkel gaar gjennem de to (imaginære) Punkter af den uendelig fjerne rette Linie, hvor denne skjæres af de to Linier, hvis Retninger bestemmes ved Koefficienterne $+\sqrt{-1}$ og $-\sqrt{-1}$. Vi ville for Kortheds Skyld kalde

disse to mærkelige Punkter de to Cirkelpunkter. Deres Ligninger findes let, idet deres Koordinater $\frac{z}{x} = 0$ og $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{-1}$ indsættes i Ligningen for den rette Linie

$$u + \frac{y}{x}v + \frac{z}{x} = 0,$$

at være

$$u \pm v\sqrt{-1} = 0$$

eller, naar de tages sammen,

$$u^2 + v^2 = 0;$$

de svare derfor dualistisk til de to Linier, der forbinde dem med Begyndelsespunktet.

Hvor der er Tale om Afstande, maa man benytte disse Punkter med stor Forsigtighed, thi de ligge paa enhver Cirkel med Ligningen $x^2 + y^2 = a$ og maa derfor siges at have ubestemt Afstand fra Begyndelsespunktet.

Ethvert Punkt med endelige Koordinater og liggende paa de to Linier til Cirkelpunkterne maa derimod siges at have Afstanden 0 fra Begyndelsespunktet, da det tilfredsstiller Ligningen $x^2 + y^2 = 0$. Man maa her som ellers ved Brugen af imaginære Koordinater holde sig til de analytiske Udtryk, uden at søge at tillægge dem nogen geometrisk Betydning.

52. Lad os f. Ex. antage, at vi søge det geometriske Sted for et Punkt a, liggende paa den rette Linie OA, hvor O er fast, medens A gjennemløber en given Kurve af $n$te Orden og $Oa \,.\, OA$ er konstant. En vilkaarlig Linie gjennem O skjærer da den søgte Kurve i n Punkter, idet der paa Linien til hvert Punkt af den givne Kurve svarer et af den søgte; Kurven A skjærer imidlertid den uendelig fjerne Linie i n Punkter, og til hvert af disse svarer et Punkt a,

der falder i O. Kurven a faar altsaa et n-dobbelt Punkt i O (vi komme senere til at undersøge saadanne Punkter nærmere) og bliver derfor i Almindelighed af Ordenen $2n$. Undtages maa her imidlertid det Tilfælde, hvor Kurven A indeholder Cirkelpunkterne, idet disses tilsvarende Punkter ikke falde i O.

De to Kurver kaldes hinandens Transformerede ved reciproke Radii vektores eller inverse Kurver. Man vil let se, at den anvendte Betragtningsmaade fører til følgende Resultater:

Et Keglesnits inverse Kurve er en Kurve af fjerde Orden med Dobbeltpunkter i Cirkelpunkterne.

En Cirkels inverse Kurve er en Cirkel; gaar Cirklen gjennem O, er den inverse Kurve en ret Linie.

En ret Linies inverse Kurve er en Cirkel gjennem O.

53. Cirkelpunkternes væsentlige Betydning er den, at de tillade os at udtrykke metriske Forhold paa en saadan Maade, at de komme ind under vore Betragtninger af Beliggenhedsforhold. Afstande indføres i Geometrien ved Cirklen, og vi kunne nu definere denne som et Keglesnit gjennem de to Cirkelpunkter. Da et Keglesnit er bestemt ved 5 Punkter, kunne vi, ifølge denne Definition, vælge tre af Cirklens Punkter vilkaarligt, saa at den indbefatter alle Cirkler. Vi kunne deraf slutte, at Sætninger, der gjælde om alle Keglesnit gjennem to faste Punkter, ogsaa maa gjælde om alle Cirkler.

Lad f. Ex. $S = 0$ være Ligningen for et Keglesnit, medens $\alpha = 0$, $\beta = 0$ og $\gamma = 0$ ere Ligninger for tre rette Linier.

$$S = 0, \quad S - k_1 \alpha\gamma = 0, \quad S - k_2 \beta\gamma = 0$$

ere da tre Keglesnit gjennem de to Punkter, i hvilke γ skjærer S; da der desuden i $k_1\alpha$ og i $k_1\beta$ er tre Konstanter, der kunne vælges vilkaarligt, kunne de to sidste Keglesnit bringes til desuden at gaa hvert gjennem tre andre vilkaarlige Punkter; de tre Ligninger tilhøre derfor tre hvilkesomhelst Keglesnit gjennem de to Punkter.

Man ser nu let, at

$$\alpha = 0, \; \beta = 0 \text{ og } k_1\alpha - k_2\beta = 0$$

ere Ligningerne for de tre andre Fælleskorder for de tre Keglesnit, og disse Ligningers Form viser, at disse tre Linier gaa igjennem samme Punkt. Heraf følger:

De tre Fælleskorder for tre Keglesnit gjennem to faste Punkter skjære hverandre i eet Punkt.	De tre Skjæringspunkter for Fællestangenterne til tre Keglesnit med to faste Tangenter ligge i en ret Linie.

Af den første af disse Sætninger udlede vi, ved at tage de to faste Punkter i Cirkelpunkterne, den Sætning, at tre Cirklers Radikalaxer skjære hverandre i eet Punkt. I den samme Sætning er forøvrigt Pascals Sætning indbefattet; man faar den ved at lade de to af Keglesnittene opløses i rette Linier.

54. Vi skulle nu vise, hvorledes Cirkelpunkterne sætte os istand til at opfatte de vigtigste metriske Forhold paa en saadan Maade, at de falde ind under de deskriptive.

Brændpunkterne. Ligningen for et Keglesnit kan som bekjendt skrives

$$(x \pm ae)^2 + y^2 = (a \pm ex)^2$$

og viser derved, at de fire rette Linier

$$y = \pm \sqrt{-1}\,(x \pm ae)$$

gjennem Brændpunkterne skjære Kurven i sammenfaldende Punkter, der ligge paa Ledelinierne $a \pm ex = 0$. Brændpunkterne ere altsaa de reelle Skjæringspunkter for Tangenterne fra Cirkelpunkterne, og ethvert Keglesnit er derfor indskrevet i den Firkant, hvis Sider ere Brændpunkternes Forbindelseslinier med Cirkelpunkterne. Keglesnit med fælles Brændpunkter kaldes konfokale; da et System af konfokale Keglesnit røre fire givne rette Linier, er der een Kurve i Systemet, der rører en vilkaarlig given Linie.

Vi kunne nu anvende Dualitetsprincipet paa den ovenfor nævnte Sætning om tre Cirklers Radikalaxer. En Cirkel er et Keglesnit gjennem de to Cirkelpunkter og svarer derfor dualistisk til et Keglesnit, der rører de to Linier fra Begyndelsespunktet til Cirkelpunkterne (51). Begyndelsespunktet bliver saaledes et Brændpunkt i Keglesnittet, og den ny Sætning hedder:

Skjæringspunkterne for de tre Par Fællestangenter til tre Keglesnit med et fælles Brændpunkt ligge i en ret Linie.

Koncentriske Cirkler ere saadanne, der røre hinanden i Cirkelpunkterne. For Cirklerne falde nemlig Brændpunkterne sammen i Centrum, og Linierne fra Centrum til Cirkelpunkterne blive deres fælles Asymptoter.

Konjugerede Diametre. Et Keglesnits Centrum er den uendelig fjerne Linies Pol, og omvendt har ethvert af denne Linies Punkter sin Polar gjennem Centrum. Da de Korder, der gaa til det uendelig fjerne Punkt halveres af dette Punkts Polar, maa en Diameter halvere Korderne i sit Kordesystem.

Konjugerede Diametre bestemme paa en

vilkaarlig ret Linie to Punktrækker, der ere i Involution, thi de svare til hinanden Punkt for Punkt, og et Par konjugerede Punkter kunne ombyttes. Skjæringspunkterne med Asymptoterne ere Involutionens Brændpunkter, thi en Asymptote er sin egen konjugerede Diameter. To konjugerede Punkter ere harmonisk forbundne med Brændpunkterne (31). Vi kunne derfor ogsaa definere konjugerede Diametre som saadanne, der ere harmonisk forbundne med Asymptoterne.

Vinkler. En af de vigtigste Anvendelser af Cirkelpunkterne er til Indførelsen af Vinkler blandt de deskriptive Egenskaber. Da en Cirkels konjugerede Diametre ere vinkelrette paa hinanden, medens dens Asymptoter gaa til Cirkelpunkterne, kunne vi definere en ret Vinkel som en saadan, hvis Ben skjære den uendelig fjerne rette Linie i Punkter, der ere harmonisk forbundne med Cirkelpunkterne.

Andre Vinkler af en given Størrelse kunne defineres paa lignende Maade. Lad os betragte to saadanne ligestore Vinkler, hvis Ben skjære hinanden i Punkterne A og B. Gjennem A, B, Vinkelspidserne og Cirkelpunkterne kunne vi lægge en Cirkel. Ifølge 35 have da de to Liniebundter, hvis Toppunkter ere de to Vinkelspidser, og som bestemmes ved A, B og Cirkelpunkterne, samme Dobbeltforhold. Ligestore Vinkler ere derfor saadanne, hvis Ben skjære den uendelig fjerne rette Linie i Punkter, der i Forbindelse med Cirkelpunkterne have samme Dobbeltforhold.

Vi ville nu give nogle Exempler paa Anvendelsen af de her beviste Sætninger.

Fra et Punkt i en Cirkelperiferi trækkes to paa hinanden vinkelrette Korder; den Linie, der forbinder disses Endepunkter gaar gjennem et fast Punkt.	Fra et Punkt af et Keglesnit trækkes to Korder, der ere harmonisk forbundne med to faste Linier; den Linie, der forbinder Kordernes Endepunkter, gaar gjennem et fast Punkt.
Fælleskorden for en Cirkel gjennem to faste Punkter og en fast Cirkel gaar gjennem et fast Punkt.	Fælleskorden for et Keglesnit gjennem fire Punkter og et fast Keglesnit gjennem to af Punkterne gaar gjennem et fast Punkt.
Man kan tegne fire Cirkler, der røre tre givne rette Linier.	Man kan tegne fire Keglesnit, der gaa gjennem to givne Punkter og røre tre givne rette Linier.
En Tangent til en Cirkel staar vinkelret paa Radius.	En Korde i et Keglesnit deles harmonisk af en Tangent og den Linie, der forbinder Røringspunktet med Kordens Pol.
To konfokale Keglesnit skjære hinanden under rette Vinkler (I. Opg, 82).	To Keglesnit ere indskrevne i samme Firkant. Enhver af den omskrevne Firkants Diagonaler deles harmonisk af Tangenterne til et af Keglesnittenes Skjæringspunkter.
Dersom man fra et Punkt af en Cirkel trækker Linier, der danne ligestore	Dersom man fra et Punkt af et Keglesnit trækker Linier, der hver med

Vinkler med Siderne af en indskreven Trekant, ligge disses Skjæringspunkter med Siderne i en ret Linie.

sin Side af en indskreven Trekant skjære en vilkaarlig Korde i Punkter, der have samme Dobbeltforhold med Kordens Endepunkter, ligge Liniernes og de tilsvarende Siders Skjæringspunkter i en ret Linie.

Hvilke Sætninger kunne udledes af følgende:

33. En Linie fra en Cirkels Centrum til Midten af en Korde staar vinkelret paa Korden.

34. Polaren er vinkelret paa den Linie, der forbinder en Cirkels Centrum med Polen.

35. Midtpunkterne af parallele Korder i en Cirkel ligge i en ret Linie.

36. I en i en Cirkel indskreven Firkant ere de modstaaende Vinkler (regnede paa passende Maade) ligestore.

37. Hvormange Parabler kan man tegne, som have et givet Brændpunkt og 1) røre to givne rette Linier, 2) gaa gjennem et givet Punkt og røre en given Linie, 3) gaa gjennem 2 givne Punkter?

38. Bevis, at Ligningen for et Keglesnit, naar man til Grundtrekant tager en saadan, i hvilken enhver Side er Polar til den modstaaende Vinkelspids (en Polartrekant), antager Formen (den kanoniske Form)

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

§ 8. Almindelige Egenskaber ved algebraiske Kurver.

55. **Kurvers Bestemmelse ved Punkter** (Tangenter). Den almindelige Ligning af $n$te Grad har

$$1 + 2 + 3 \ldots + (n + 1) = \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$$

Led og indeholder derfor af Konstanter $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$.

Ligningen vil i Almindelighed kunne gives særlige Former, naar derved Konstanternes Antal bliver uforandret; Sammenligning af de to Former vil nemlig forsyne os med et tilstrækkeligt Antal Ligninger til Bestemmelse af de ny Konstanter ved de givne. Saaledes kan den almindelige Ligning af 2den Grad gives Formen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (ax + by + c)^2,$$

da man ogsaa her finder 5 Konstanter. Punktet (α, β) er et af Brændpunkterne, medens Linien $ax + by + c = 0$ er den tilsvarende Ledelinie (54). Ligningen kan derimod kun i specielle Tilfælde gives Formen

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

da der i denne Ligning kun findes 4 Konstanter. Paa en Form med flere end 5 Konstanter kan Ligningen bringes paa uendelig mange Maader; saaledes vil den antage Formen

$$\alpha^2 = k\beta\gamma,$$

naar β og γ ere to vilkaarlige Tangenter, og α er den tilsvarende Røringskorde; man ser nemlig, at Skjæring med β eller γ bestemmer to sammenfaldende Punkter, der ligge paa α.

Gjennem $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkter kan der lægges een og kun een Kurve af $n$te Orden.

Indsætter man nemlig de givne Punkters Koordinater i den almindelige Ligning af $n$te Grad, faar man $\frac{1}{2}n(n+3)$ lineære Ligninger til Bestemmelse af dennes Konstanter.

Det er forudsat, at de givne Punkter ere saadanne, at ikke enhver Kurve af $n$te Orden, der gaar gjennem nogle af dem, ogsaa gaar gjennem et eller flere af de øvrige, da dette vilde medføre, at en eller flere af Bestemmelsesligningerne kunde udledes af de andre, hvorved Opgaven blev ubestemt. Saaledes bliver et Keglesnit ikke bestemt ved 5 Punkter, af hvilke 4 ligge i en ret Linie, thi ethvert Keglesnit, der indeholder tre Punkter, som ligge i en ret Linie, maa være sammensat af denne Linie og en anden Linie (da en ret Linie kun kan skjære et Keglesnit i 2 Punkter); det fjerde Punkt i den rette Linie tilføjer da ikke nogen ny Bestemmelse.

Dersom man i den almindelige Ligning af $n$te Grad ombytter x og y med u og v, faar man Tangentligningen for den almindelige Kurve af $n$te Klasse. Af Dualitetsprincipet følger da, at Kurven af $n$te Klasse er bestemt ved $\frac{n(n+3)}{2}$ Tangenter, naar enhver af disse tilføjer en ny Bestemmelse.

56. I Ligningernes Theori bevises, at to almindelige Kurver af $m$te og $n$te Orden have mn Skjæringspunkter. Specielle Kurver tænkes dannede ved kontinuert Overgang fra almindelige Kurver af samme Orden; man faar derfor altid det angivne Antal Skjæringspunkter, naar man holder Regnskab med dem, der ved Overgangen falde sammen eller fjerne sig i det Uendelige.

To Kurver af tredie Orden skjære altsaa hinanden i 9 Punkter. Kurven af tredie Orden er bestemt ved 9 Punkter og gjennem 8 givne Punkter kan man derfor lægge saamange saadanne Kurver, som man vil. Lad $U=0$ og $V=0$ være to af disse; Ligningen

$$U-kV=0 \qquad (76)$$

vil da tilhøre Systemet af ∞^1 Kurver gjennem de otte Punkter, thi opgive vi et 9de Punkt, bestemmes derved k. Dog maa det Tilfælde undtages, hvor det 9de Punkt er det 9de Skjæringspunkt for U og V, thi ved det bliver (76) identisk og bestemmer ikke k. Vi se heraf, at alle Kurver af tredie Orden, som gaa gjennem 8 givne Punkter, ogsaa gaa gjennem det samme 9de Punkt. Selv de 8 Punkter kunne ikke vælges vilkaarligt; dersom flere end tre af dem ligge i en ret Linie eller flere end 6 af dem ligge paa et Keglesnit, maa denne rette Linie eller dette Keglesnit være en Del af Kurven af tredie Orden, og ny givne Punkter paa den rette Linie eller paa Keglesnittet ville ikke give nogen ny Bestemmelse.

Exp. Lad en ret Linie skjære en Kurve af tredie Orden i A, B og C, en anden ret Linie skjære den i A_1, B_1 og C_1; Linierne AA_1, BB_1 og CC_1 ville da skjære Kurven i tre andre Punkter A_2, B_2 og C_2; disse tre Punkter ligge i en ret Linie, thi Kurven og de to Sæt rette Linier

$$AB,\ A_1B_1,\ A_2B_2,$$
$$AA_1,\ BB_1,\ CC_1,$$

betragtede som Kurver af tredie Orden, have 8 Punkter fælles og maa da ogsaa have det 9de Punkt C_2 fælles.

Vi saa ovenfor, at man kan lægge en Kurve af 3die Orden gjennem 10 givne Punkter, dersom de 9 af disse ere Skjæringspunkter for 2 Kurver af tredie Orden. Vi kunne paa samme Maade vise, at Kurver af $n$te Orden, der indeholde $\frac{n(n+3)}{2}-1$ faste Punkter, ogsaa indeholde $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ andre faste

Punkter, der ere Skjæringspunkter for to vilkaarlige Kurver af $n$te Orden gjennem de givne Punkter.

57. En Kurve af $n$te Orden skjæres af en Kurve af $p$de Orden i np Punkter; ligger der flere Punkter paa begge Kurver, maa den af højst Orden være sammensat; vi kunne imidlertid vise, at af saadanne $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkter, der virkelig bestemme en usammensat Kurve af $n$te Orden, kunne højst $np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ ligge paa en Kurve af $p$de Orden. Lad os nemlig antage, at et Punkt flere laa paa en Kurve af $p$de Orden; gjennem de øvrige

$$\frac{n(n+3)}{2} - \left(np - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1\right) = \frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$$

Punkter kan der altid lægges en sammensat eller usammensat Kurve af Ordnen $n-p$. Denne danner, i Forbindelse med Kurven af $p$de Orden, en sammensat Kurve af Ordnen n, som gaar gjennem de givne Punkter; dette er imidlertid umuligt, da det var givet, at disse Punkter bestemte en usammensat Kurve af $n$te Orden, og da vi have bevist, at denne i saa Fald er den eneste mulige Kurve af $n$te Orden, der indeholder Punkterne.

58. Dersom af de n^2 Skjæringspunkter for to Kurver af $n$te Orden de np ligge paa en Kurve af $p$de Orden, maa de øvrige $n(n-p)$ ligge paa en Kurve af Ordnen $n-p$.

Thi gjennem de $\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ af disse Punkter kunne vi lægge en Kurve af Ordnen $n-p$; denne og Kurven af $p$de Orden danne en sammensat Kurve af $n$te Orden, der indeholder

$$np + \frac{(n-p)(n-p+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1$$

Punkter; da den saaledes indeholder mindst $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ af de n^2 Skjæringspunkter, maa den indeholde dem alle (56).

De to Kurver af $n$te Orden kunne godt være sammensatte. Have vi f. Ex. en Sexkant med Vinkelspidserne 1, 2 . . . 6 indskreven i et Keglesnit, kunne vi betragte Linierne 12, 34 og 56 som een, 23, 45 og 61 som en anden Kurve af tredie Orden. Af disse Kurvers 9 Skjæringspunkter ligge de 6 paa Keglesnittet; de tre andre, nemlig Skjæringspunkterne for Sexkantens modstaaende Sider, maa da ligge paa en ret Linie. Vi have saaledes her et nyt Bevis for Pascals Sætning.

59. Enhver Kurve af $n$te Orden, som gaar gjennem $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Punkter af en Kurve af $p$de Orden ($n > p$), maa gaa gjennem de samme $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ andre Punkter af denne Kurve.

For Simpelheds Skyld ville vi tage $n = 5$, $p = 4$. Vi skulle da bevise, at alle Kurver af 5te Orden, som gaa gjennem 17 givne Punkter af en Kurve af 4de Orden, skjære denne i de samme 3 andre Punkter. Lad nu to vilkaarlige Kurver af 5te Orden gjennem de 17 Punkter endvidere skjære hinanden i Punkterne a og b. Den rette Linie ab danner i Forbindelse med Kurven af 4de Orden en Kurve af 5te Orden; denne og de to Kurver af 5te Orden indeholde de samme 19 Punkter og maa derfor ogsaa have de øvrige 6 Skjæringspunkter fælles (56). De to Kurver af 5te Orden skjære derfor Kurven af fjerde Orden (foruden i de 17 Punkter) i de samme tre Punkter og den rette Linie (foruden i de to Punkter) i de samme

tre Punkter. Vi have herved tillige vist, at de 5 Skjæringspunkter for de to Kurver af 5te Orden, der ikke ligge paa Kurven af 4de Orden, ligge i en ret Linie (Smlgn. 58).

Vi have saaledes set, at $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkter enten bestemme en Kurve af $n$te Orden og saa kun een (sammensat eller usammensat) eller ogsaa ligge saaledes, at nogle af dem bestemme de øvrige som Punkter af Kurven, og at der i dette Tilfælde gjennem Punkterne kan lægges uendelig mange Kurver af $n$te Orden. Ved Dualitetsprincipet udledes de med de udviklede analoge Sætninger om Kurver af $n$te Klasse, bestemte ved $\frac{n(n+3)}{2}$ Tangenter.

60. **Mærkelige Punkter.** Den almindelige Ligning af $n$te Grad i x og y

$$f(x,y) = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots = 0 \quad (77)$$

ville vi kortere skrive

$$u = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_n = 0, \quad (78)$$

hvor u_p betegner Summen af Led af $p$de Grad.

Sætte vi $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, faa vi

$$A + r(B\cos\theta + C\sin\theta)$$
$$+ r^2(D\cos^2\theta + E\cos\theta\sin\theta + F\sin^2\theta) + \ldots = 0.$$

Denne Lignings n Rødder ere de n Stykker, som Kurven afskjærer af en ved Vinklen θ bestemt Linie gjennem Begyndelsespunktet O. Er $A = 0$, gaar Kurven gjennem O, og den ene Værdi af r bliver Nul for enhver Værdi af θ. For den Linie, der bestemmes ved

$$B\cos\theta + C\sin\theta = 0,$$

blive to Værdier af r Nul, saa at Linien er Tangent; ved Multiplikation med r faas

$$Bx + Cy = 0 \quad \text{eller} \quad u_1 = 0 \qquad (79)$$

som Ligning for Tangenten.

Dersom $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, skjære alle Linier gjennem O Kurven i to sammenfaldende Punkter; Punktet kaldes et Dobbeltpunkt; af de derigjennem gaaende Linier skjære to Kurven i tre sammenfaldende Punkter, nemlig de, der ere bestemte ved Ligningen

$$D \cos^2 \theta + E \cos \theta \sin \theta + F \sin^2 \theta = 0,$$

hvoraf ved Multiplikation med r^2

$$Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0 \quad \text{eller} \quad u_2 = 0. \qquad (80)$$

Begyndelsespunktet er altsaa et Dobbeltpunkt, dersom Ligningens laveste Led ere af anden Grad, og $u_2 = 0$ bestemmer Dobbeltpunktets to Tangenter. Efter Tangentens almindelige Definition er egentlig enhver Linie gjennem et Dobbeltpunkt en Tangent, men man bruger særlig denne Benævnelse om de to Linier, der skjære Kurven i tre sammenfaldende Punkter.

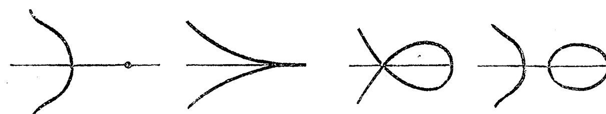
Dersom vi løse Ligningen (80) med Hensyn til $\frac{y}{x}$, kunne de to Rødder blive reelle, sammenfaldende eller imaginære. I det første Tilfælde er Punktet et almindeligt Dobbeltpunkt, det vil sige et saadant Punkt, hvor to af Kurvens Grene skjære hinanden; i det andet Tilfælde falde de to Tangenter sammen til een, og Punktet kaldes en Spids. Et Punkt, hvor to af Kurvens Grene røre hinanden (et Selvberøringspunkt), er indbefattet herunder som specielt Tilfælde, idet Tangenten i et saadant Punkt skjærer Kurven i fire sammenfaldende Punkter. I det tredie Tilfælde har Dobbeltpunktet imaginære Tangenter; Punktet har derfor intet reelt konsekutivt Punkt; det er et isoleret Punkt; det ligger i Alminde-

lighed ikke paa Kurvens Grene, men har den for Dobbeltpunktet karakteristiske Egenskab, at enhver Linie igjennem det, foruden i det, kun skjærer Kurven i $n-2$ Punkter.

Exp. 1. Ligningen

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c),$$

hvor $a < b < c$ tilhører en Kurve, der er sammensat af en Oval og en aaben Gren. For $b = c$ gaar Figuren over til en Sløjfe med almindeligt Dobbeltpunkt; for $a = b$ svinder Ovalen ind til et isoleret Punkt, og for $a = b = c$ svinder Sløjfens Øje ind til et Punkt, hvorved Spidsen fremkommer. Vi kunne derfor opfatte Spidsen som en uendelig lille Sløjfe.



Exp. 2. $xy + x^3 + y^3 = 0$. O er et Dobbeltpunkt med Axerne til Tangenter.

$x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 0$. O er et Dobbeltpunkt med Tangenterne $y = \pm x$.

$x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2 = 0$. O er et isoleret Punkt, hvis imaginære Tangenter gaa til Cirkelpunkterne.

$(x-y)^2 + 3x^3 = 0$. O er en Spids med Tangenten $y = x$.

61. Vi kunne nu fortsætte vor Undersøgelse paa samme Maade. Dersom $D = E = F = 0$ er Punktet tredobbelt, idet enhver Linie igjennem det faar tre sammenfaldende Skjæringspunkter i dette Punkt. Tre Linier skjære Kurven i 4 sammenfaldende Punkter; disse, Tangenterne, bestemmes ved Ligningen $u_3 = 0$. Denne Ligning er af tredie Grad med Hensyn til $y : x$, og en

Ligning af tredie Grad har en eller tre reelle Rødder. I det første Tilfælde frembyder Punktet ingen synlig Særegenhed, men maa opfattes som et isoleret Punkt, der falder paa en Kurvegren. I det andet Tilfælde have vi gjennem Punktet tre reelle Grene, af hvis Tangenter to eller tre kunne falde sammen o. s. v. Vi skulle ikke fortsætte denne Undersøgelse videre, men blot bemærke, at i Almindelighed bliver O et p-dobbelt Punkt, dersom u_p indeholder Leddene af lavest Grad, og at $u_p = 0$ i dette Tilfælde bestemmer de p Tangenter.

62. Ved Bestemmelsen af en Kurve ved opgivne Betingelser vil den Betingelse, at Kurven skal have et givet Punkt til Dobbeltpunkt, erstatte tre givne Punkter; vælge vi nemlig det givne Punkt til Begyndelsespunkt, maa vi have $A = B = C = 0$, og der bliver saaledes tre Konstanter færre at bestemme. Er der kun givet, at Kurven skal have et Dobbeltpunkt, men ikke dettes Beliggenhed, blive dets to Koordinater ubestemte, og den givne Betingelse giver en Betingelsesligning mellem Kurvens Konstanter. Ved en Kurve, bestemt ved Punktligningen, bliver Dobbeltpunktet derfor en Særegenhed, som kun findes i specielle Tilfælde, nemlig naar Kurvens Konstanter tilfredsstille en vis Betingelsesligning.

Dersom vi paa lignende Maade søge det Antal Betingelsesligninger, som et p-dobbelt Punkt fører med sig, finde vi det, naar Punktet er givet, at være $\frac{1}{2}p(p+1)$. Punktet kan tænkes opstaaet ved, at $\frac{1}{2}p(p-1)$ Dobbeltpunkter ere faldne sammen. Vi kunne anskueliggjøre dette ved at tænke os de p Grene gjennem Punktet forrykkede lidt, saa at ikke tre skjære hverandre i samme Punkt; der bliver da et Dobbeltpunkt for hver Kombination af to Grene, og disse $\frac{1}{2}p(p-1)$

Dobbeltpunkter falde sammen, naar Grenene gaa gjennem samme Punkt.

At en Kurve skal have en Spids tæller som to Bestemmelser, thi foruden Betingelsen for Dobbeltpunkt faa vi Betingelsen for, at den Ligning, der bestemmer Tangenterne, har lige Rødder. Et tredobbelt Punkt med to sammenfaldende Tangenter kan, som en lille Forskydning af den ene Gren viser det, betragtes som opstaaet ved, at to Dobbeltpunkter og en Spids ere faldne sammen. Denne Betragtning kan føres videre, saa at vi i Almindelighed kunne betragte et Mangefoldspunkt, af hvis Tangenter nogle falde sammen, som opstaaet ved Foreningen af almindelige Dobbeltpunkter og Spidser. Vi komme senere tilbage til dette Forhold.

63. Vi have bevist, at en ret Linie, der gaar gjennem et p-dobbelt Punkt, i dette skjærer Kurven i p Punkter. Vi mene dermed egentlig, at en ret Linie i en uendelig lille Afstand fra Punktet skjærer Kurven i p Punkter, hvis Afstande fra Mangefoldspunktet ere uendelig smaa. En Kurve, der har en uendelig lille Afstand fra Mangefoldspunktet, maa da ogsaa skjære den givne Kurve i p Punkter, hvis Afstande ere uendelig smaa; thi erstatte vi Kurven ved dens Tangent, flytte vi Skjæringspunkterne Stykker, der, som bekjendt, ere uendelig smaa af anden Orden; vi kunne derfor sige, at enhver Kurve gjennem et p-dobbelt Punkt af en anden Kurve i dette skjærer i p sammenfaldende Punkter. Heraf følger, at et Punkt, hvor et p-dobbelt Punkt af den ene Kurve falder sammen med et q-dobbelt Punkt af den anden Kurve, maa tælles som pq Skjæringspunkter. Have de to Kurver Grene, som røre hinanden, forøges Tallet; er f. Ex. de

to Kurvers Ligninger

$$u_k + u_{k+1} + \ldots = 0; \quad u_k + v_{k+1} + \ldots = 0,$$

bliver $u_{k+1} - v_{k+1} + \ldots = 0$ Ligningen for en Kurve gjennem deres Skjæringspunkter; da denne Kurve og en af de givne i Almindelighed ikke have fælles Tangenter i Mangefoldspunktet, vil i dette $k(k+1)$ Skjæringspunkter falde sammen. Ere Punkterne f. Ex. Spidser med samme Tangent, falde 6 Skjæringspunkter sammen, medens for en enkelt Gren gjennem en Spids, med samme Tangent som denne, 3 Skjæringspunkter falde sammen. Tage vi Spidsen som en uendelig lille Sløjfe, se vi de tre Skjæringspunkter, der falde sammen.

64. **Antallet af Dobbeltpunkter.** En Kurve af tredie Orden kan kun have eet Dobbeltpunkt, thi havde den to, vilde en ret Linie gjennem disse skjære Kurven i fire Punkter. Dersom Kurven er sammensat af en ret Linie og et Keglesnit, faar den to Dobbeltpunkter, er den sammensat af tre rette Linier, faar den tre. En usammensat Kurve af fjerde Orden kan kun have tre Dobbeltpunkter, thi havde den fire, vilde et Keglesnit gjennem disse og et vilkaarligt femte Punkt af Kurven skjære denne i 9 Punkter. I Almindelighed kunne vi indse, at en usammensat Kurve af $n$te Orden ikke kan have flere end $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Dobbeltpunkter, thi havde den et flere, vilde en Kurve af Ordnen $n-2$ gjennem disse og $n-3$ andre af Kurvens Punkter, skjære denne i $n(n-2) + 1$ Punkter.

Om der existerer Kurver af enhver Orden med det her bestemte højst mulige Antal Dobbeltpunkter (Unikursale Kurver) vides ikke.

65. Vi fandt Dobbeltpunktet og Spidsen ved Benyttelse af retvinklede Koordinater; vi kunne imidlertid ræsonnere paa lignende Maade, naar vi for x og y sætte hvilkesomhelst lineære Udtryk eller f. Ex. benytte Trekantskoordinater. Vi ville vise dette ved nogle Exempler.

Exp. 1. $$\alpha\varphi + \beta\psi = 0.$$
α og β ere lineære Udtryk, φ og ψ hvilkesomhelst hele Funktioner af x og y. Kurven indeholder Punktet (α, β), og dens Tangent i dette Punkt er
$$\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 = 0,$$
hvor φ_1 og ψ_1 betegne de Værdier, som φ og ψ faa, naar vi i dem indsætte Koordinaterne til (α, β). Ved Elimination af x og y bringe vi nemlig φ og ψ paa Formen
$$\varphi \equiv \varphi_1 + A\alpha + B\beta + C\alpha\beta + \ldots;$$
$$\psi \equiv \psi_1 + A_1\alpha + B_1\beta + C_1\alpha\beta + \ldots,$$
hvorved Kurvens Ligning bliver
$$\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 + A\alpha^2 + (B + A_1)\alpha\beta + B_1\beta^2 + \ldots = 0;$$
Skjæringspunkterne med Linien
$$\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 = 0$$
bestemmes da ved en Ligning af Formen
$$\alpha^2(a + b\alpha + c\alpha^2 \ldots) = 0,$$
saa at de to sammenfaldende Skjæringspunkter falde paa Linien $\alpha = 0$.

Paa lignende Maade ser man, at en Kurve, hvis Ligning har Formen
$$\alpha^2\varphi + \alpha\beta\psi + \beta^2\chi = 0,$$
har et Dobbeltpunkt i Punktet (α, β), og at dette Dobbeltpunkts Tangenter bestemmes ved
$$\alpha^2\varphi_1 + \alpha\beta\psi_1 + \beta^2\chi_1 = 0.$$

Exp. 2. Ligningen
$$\alpha\beta\gamma \ldots = \alpha_1\beta_1\gamma_1 \ldots$$

tilhører en Kurve, der indeholder Punkterne

$$(\alpha, \alpha_1),\ (\alpha, \beta_1)\ldots,\ (\beta, \alpha_1),\ (\beta, \beta_1)\ldots$$

Exp. 3. Ligningen

$$\alpha\varphi + \beta^2\psi = 0$$

tilhører en Kurve gjennem Punktet (α, β), og hvis Tangent i dette Punkt er $\alpha = 0$.

Exp. 4. Ligningen

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n + \beta^2\psi = 0,$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2\ldots\beta$ ere lineære, medens ψ er af Graden $n-2$, tilhører en Kurve, der rører de n Linier α i Punkter, som ligge paa Linien β. De n Tangenter skjære desuden Kurven i $(n-2)n$ Punkter, der alle ligge paa Kurven $\psi = 0$.

Exp. 5. $\alpha\varphi + \beta^2\gamma^2\psi = 0.$

$\alpha = 0$ rører Kurven i Punkterne (α, β) og (α, γ); Kurven indeholder alle Skjæringspunkterne for $\varphi = 0$ og $\psi = 0$ o. s. v. α er en Dobbelttangent, og hvis $\beta \equiv \gamma$, falde de to Røringspunkter sammen i et Punkt, hvor α faar Røring af tredie Orden med Kurven; har Ligningen derimod Formen

$$\alpha\varphi + \beta^3\psi = 0,$$

bliver α en Vendetangent, der i (α, β) har Røring af anden Orden med Kurven; i dette Punkt falde nemlig tre Skjæringspunkter sammen.

Exp. 6. Ligningen

$$S^2 = \alpha\beta\gamma^2,$$

hvor S er et vilkaarligt Keglesnit, tilhører en Kurve af fjerde Orden med Dobbelttangenterne α og β og med Dobbeltpunkter i de to Punkter, hvor γ skjærer S; ethvert Keglesnit gjennem disse to Punkter har nemlig en Ligning af Formen $S = \gamma\delta$, hvor δ er lineær (53), og af

Kurvens 8 Skjæringspunkter med et saadant Keglesnit falde altid to og to sammen i de to Punkter. De fire Røringspunkter og de to Dobbeltpunkter ligge paa S.

66. **Rækkeudviklinger for Grenene gjennem et Mangefoldspunkt.** For at bestemme en Kurves Figur i Nærheden af et Mangefoldspunkt, maa man vide, til hvilken Side Grenene vende deres Konkavitet; dette afgjøres let, naar man kjender de første Led af Rækkeudviklingerne for Grenene; disse Rækkeudviklinger kunne findes paa følgende Maade, idet vi forudsætte, at det Mangefoldspunkt, som vi undersøge, ligger i Begyndelsespunktet, og at vi benytte et retvinklet Koordinatsystem.

Den Række, vi søge for en af Kurvens Grene, har Formen

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \ldots, \qquad (81)$$

hvor $\beta > \alpha$; vi tænke os x og y som uendelig smaa og sige da, at y er uendelig lille af Ordnen α, idet vi forudsætte, at x er uendelig lille af første Orden. y er altsaa uendelig lille af Ordnen α, naar Grændseværdien for Forholdet $y : x^{\alpha}$ er endelig og ikke Nul.

Vi kunne nu i Kurvens Ligning bortkaste alle Led undtagen dem, der ere uendelig smaa af den laveste Orden; derved bestemmes det første Led af Rækkeudviklingen; sætte vi derpaa i Ligningen $y = Ax^{\alpha} + y_1$, kunne vi paa lignende Maade bestemme det andet Led af Rækkeudviklingen o. s. v.

Exp. 1. $\qquad x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

Leddenes Orden er henholdsvis

$$3, \quad 3\alpha, \quad 1 + \alpha;$$

for $\alpha > 1$ bortkaste vi derfor det andet, for $\alpha < 1$ det første Led; vi faa derved henholdsvis

$$x^3 = 3axy \quad \text{og} \quad y^3 = 3axy,$$

altsaa

$$y = \frac{1}{3a} x^2 + \dots$$

$$y = \sqrt{3a}\, x^{\frac{1}{2}} + \dots$$

Den første Gren har x-Axen, den anden y-Axen til Tangent; ved de fundne Led er Konkavitetens Stilling bestemt for begge Grenene, idet de to Ligninger, naar vi kun benytte disse Led, tilhøre to Parabler, der have Røring af 2den Orden med de to Kurvegrene.

Exp. 2. $x^4 - yx^2 + y^3 = 0.$

Begyndelsespunktet er et tredobbelt Punkt, hvis Tangenter ere $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. For den første Gren faa vi $\alpha = 2$, $y = x^2 + \dots$, for de to sidste $\alpha = 1$, $y = \pm x + \dots$; sætte vi nu $y = \pm x + y_1$, blive Leddene af lavest Orden (idet $\beta > 1$) $x^4 + 2y_1 x^2 = 0$; vi faa altsaa

$$y = \pm x - \tfrac{1}{2} x^2 \dots$$

og se deraf, at begge Grenene ligge under deres Tangent. Da det undersøgte Punkt tæller som tre Dobbeltpunkter, kan Kurven ikke have andre Dobbeltpunkter.

Exp. 3. $y^2 + u_3 + u_4 + \dots = 0$

er den alm. Ligning for en Kurve, der i Begyndelsespunktet har en Spids med Tangenten $y = 0$. Leddene af lavest Orden blive, idet a er en Konstant,

$$y^2 = ax^3,$$

saa at de to Grenes Rækkeudviklinger blive

$$y = \pm \sqrt{a}\, x^{\frac{3}{2}} + \dots$$

Vi se heraf, at S p i d s e n s to G r e n e ligge paa h v e r s i n S i d e af T a n g e n t e n; ligge de to Grene paa samme Side af Tangenten, have vi en Særegenhed af en højere

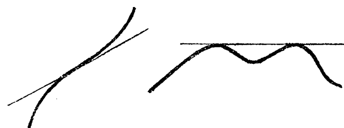
Art, idet Tangenten i saa Fald skjærer i 4 sammenfaldende Punkter. Tages Figuren som Grændsefigur, ser man de fire Skjæringspunkter, der falde sammen. $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ giver Exempel herpaa.

67. **Mærkelige Tangenter.** Hertil regnes Mangefoldstangenter, der røre Kurven i flere Punkter, og Vendetangenter, der skjære Kurven i tre sammenfaldende Punkter (have Røring af anden Orden med Kurven), idet Kurven fortsættes til begge Sider af Røringspunktet (til Forskjel fra Tangenten i en Spids).

Tage vi en Tangent som x-Axe, maa Kurvens Ligning have Formen

$$(x - a)^2 (x - b)(x - c) \dots + y \cdot \varphi = 0, \qquad (82)$$

hvor φ er en hel Funktion af x og y. Tangentens Røringspunkt har Abscissen a, medens den forøvrigt skjærer Kurven i Punkterne b, c . . . Er $a = b$, falde tre Skjæringspunkter sammen i Røringspunktet og Tangenten er en Vendetangent; er $b = c$, bliver Tangenten en Dobbelttangent, der rører i Punkterne a og b o. s. v.



De to Slags Tangenter optræde her som sideordnede, medens derimod Spidsen kom frem som specielt Tilfælde af Dobbeltpunktet. Medens Kurven af $n$te Orden kun har Dobbeltpunkter, naar Koefficienterne tilfredsstille en Betingelsesligning, har den i Almindelighed Dobbelttangenter og Vendetangenter; den rette Linie har nemlig to Konstanter, og disse kunne bestemmes saaledes, at,

af den rette Linies Skjæringspunkter med Kurven, enten tre falde sammen eller fire falde sammen to og to. En almindelig Kurve af tredie Orden har saaledes 9 Vendetangenter, og en almindelig Kurve af fjerde Orden har 28 Dobbelttangenter. Vi skulle senere se, hvorledes de mærkelige Tangenters Antal bestemmes.

68. Anvendelse af Dualitetsprincipet. Da de fundne Resultater kun angaa Beliggenhedsforhold, kan Dualitetsprincipet anvendes paa dem; vi se da, at Dobbeltpunkt og Dobbelttangent svare dualistisk til hinanden; vi faa nemlig:

Af en Kurves Skjæringspunkter med en ret Linie gjennem et Dobbeltpunkt falde to sammen i Punktet.	Af en Kurves Tangenter fra et Punkt paa en Dobbelttangent falde to sammen paa Tangenten.
For to af Linierne gjennem Punktet (Tangenterne) falde tre Skjæringspunkter sammen.	For to af Liniens Punkter (Røringspunkterne) falde tre Tangenter sammen.
Falde de to Tangenter sammen, er Punktet en Spids.	Falde de to Røringspunkter sammen, er Tangenten en Vendetangent.

Den sidste Sætning kræver Bevis; vi have nemlig her bestemt en Vendetangent derved, at tre af Tangenterne fra dens Røringspunkt falde sammen, medens vi tidligere have bestemt den derved, at den skjærer i tre sammenfaldende Punkter; vi maa altsaa bevise, at det er den samme Linie, der bestemmes paa begge Maader. Vi ville give dette Bevis senere (73).

Vi se, at det er af Vigtighed at holde fast paa det Synspunkt, hvorfra vi betragte Kurven. Tage vi denne

som Punktfrembringelse, blive Dobbelttangenter og Vendetangenter almindelige, sideordnede Særegenheder, medens Dobbeltpunktet bliver en speciel Særegenhed, der kun findes, naar en Betingelsesligning er opfyldt, og hvoraf Spidsen atter er et specielt Tilfælde. Betragte vi derimod Kurven som Tangentfrembringelse, blive Dobbeltpunktet og Spidsen almindelige sideordnede Særegenheder, medens Dobbelttangenten bliver en speciel Særegenhed, der kun findes, naar en Betingelsesligning er opfyldt, og hvoraf Vendetangenten atter er et specielt Tilfælde. Betydningen af Synspunktet viser sig klart, naar vi f. Ex. spørge om det Antal sammenfaldende Skjæringspunkter, en Dobbelttangent faar med en Kurve, naar de to Røringspunkter falde sammen. Falde de sammen, idet en Parameter i Punktligningen varierer, er Svaret 4 (Røring af tredie Orden), men falde de sammen, idet en Parameter i Tangentligningen varierer, er Svaret 3 (Vendetangent).

69. **Uendelig fjerne Punkter.** Indføre vi den uendelig fjerne Linie som tredie Grundlinie, bliver Kurvens Ligning

$$u_n + u_{n-1}z + u_{n-2}z^2 + \ldots = 0 \qquad (83)$$

og dens Skjæringspunkter med den uendelig fjerne Linie bestemmes derfor ved

$$u_n = 0. \qquad (84)$$

Da u_n er homogen, deler $u_n = 0$ sig i n Ligninger af Formen $y = ax$ og bestemmer derfor n rette Linier gjennem Begyndelsespunktet, som gaa til Kurvens n uendelig fjerne Punkter. Der gives altsaa ved en Kurve af $n$te Orden n saadanne Retninger, at enhver Linie i en af disse Retninger skjære Kurven i et uendelig fjernt Punkt. De uendelig fjerne Punkter opfattes som sædvanlig projektivisk, saa

at vi under Eet betragte alle med Kurven homografiske Kurver; vi kunne derfor tale om uendelig fjerne Dobbeltpunkter, Vendepunkter o. s. v., idet vi derved mene saadanne Punkter, som i en med den givne Kurve homografisk Kurve ere Dobbeltpunkter, Vendepunkter o. s. v. Disse Egenskaber udtrykke nemlig kun Beliggenhedsforhold og ere derfor projektiviske.

I hvert af de n Bundter af Paralleler findes en Asymptote, det vil sige en Linie, der skjærer Kurven i to uendelig fjerne Punkter; sætte vi nemlig $y = ax + q$, idet a er en af de ved (84) bestemte Retningskoefficienter, faa vi til Bestemmelse af Skjæringspunkterne med Kurven en Ligning af Formen

$$Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = 0, \qquad (85)$$

hvor man let ser, at A kun kan indeholde q i første Potens, B kun q i anden Potens o. s. v. Sætte vi $A = 0$, bestemmes derved en Værdi af q, og da for denne to Værdier af x ere uendelige, er derved Asymptoten bestemt. Dersom $A = 0$ for alle q, skjære alle Parallelerne Kurven i to sammenfaldende, uendelig fjerne Punkter; Punktet er da et Dobbeltpunkt, hvis to Tangenter bestemmes ved $B = 0$ o. s. v. Dette Tilfælde indtræder, naar $y - ax$ er to Gange Faktor i u_n og tillige Faktor i u_{n-1}. Dersom q findes i A, og den ved $A = 0$ bestemte Værdi af q ogsaa giver $B = 0$, er Punktet et Vendepunkt, idet Asymptoten da skjærer Kurven i tre sammenfaldende Punkter.

Exp. 1. $\quad x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

Kun Kurvens ene uendelig fjerne Punkt er reelt og bestemmes ved $x + y = 0$; sætte vi $y = -x + q$ i Kurvens Ligning, faa vi

$$3x^2(q + a) - 3qx(q + a) + q^3 = 0,$$

der viser, at Linien

$$y + x + a = 0$$

er Asymptote og tillige Vendetangent med Røringspunktet i det uendelig fjerne Punkt. Denne Kurve er bekjendt under Navnet Descartes' Blad; vi have tidligere set, at den har et Dobbeltpunkt i Begyndelsespunktet med Axerne til Tangenter.

Exp. 2. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

De to Cirkelpunkter og Begyndelsespunktet ere Dobbeltpunkter. Tangenterne i Begyndelsespunktet ere $y \pm x = 0$; de ere begge Vendetangenter, da de skjære Kurven i $(3 + 1)$ sammenfaldende Punkter. Kurven, der ligner Tegnet ∞, kaldes Lemuiskaten.

Exp. 3. En ret Linie drejer sig om O og skjærer en anden ret Linie $\mp OX$ i Afstanden b i Punktet A. Man afsætter AB lig en given Linie a paa OA og søger det geom. St. for B; man finder let Ligningen for den søgte Kurve, den saakaldte Nikomedes' Conchoide, $y^2(x^2 + y^2) - 2yb(x^2 + y^2) + b^2x^2 + (b^2 - a^2)y^2 = 0$.

Begyndelsespunktet er isoleret, Spids eller alm. Dobbeltpunkt, eftersom $b > a$, $b = a$ eller $b < a$. Den givne Linie er Kurvens Tangent i et uendelig fjernt Selvberøringspunkt. Kurven gaar gjennem Cirkelpunkterne, og de Linier, der forbinde disse med O, ere Asymptoter.

Exp. 4. $x^2a = y(x^2 + y^2)$.

Kurven kaldes Diokles Kissoide. Den har en Spids i Begyndelsespunktet og $y = a$ er Vendetangent med uendelig fjernt Røringspunkt. Kurven gaar gjennem Cirkelpunkterne.

Exp. 5. Det geometriske Sted for de Punkter, hvis Afstande fra to givne Punkter (a, o) og $(-a, o)$ er b^2, kaldes Cassinis Ellipse. Kurven har Ligningen

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4.$$

Er $b = a$, have vi Lemniskaten (Exp. 2). Cirkelpunkterne ere Dobbeltpunkter. Skjæringspunkterne med x-Axen bestemmes ved $x^2 = a^2 \pm b^2$, med y-Axen ved $y^2 = -a^2 \pm b^2$. For $a > b$ bestaar Kurven derfor af to Ovaler, for $a < b$ af een lukket Gren.

39. Find Asymptoterne til Kurven

$$(x + y)(2x + y)(3x + y)$$
$$+ 17x^2 + 11xy + 2y^2 + 12x + 10y + 36 = 0.$$

40. Undersøg Begyndelsespunktet og de uendelig fjerne Punkter af Kurven

$$x^4(x + b) = a^3y^2.$$

41. Undersøg Kurverne

$$x^3 + x^2 = y^2;\ (y + x^2)^3 = x^2;\ a^2(y^2 - x^2) + x^4 = 0;$$
$$y^4 + x^4 = 2axy^2;\ (x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) + xy = 0;$$
$$x^3 - x^2y = a^2y;\ x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$$

70. **Carnots Theorem.** Kurven $f(x, y) = 0$ skjæres af den rette Linie $y - b = \alpha(x - a)$ i Punkter, bestemte ved Ligningen

$$f(x, b + \alpha(x - a)) = 0,$$

hvor

$$f(x, b + \alpha(x - a)) \equiv A(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \quad (86)$$

idet A er en Koefficient, der indeholder α, medens x_1, x_2 ... ere Ligningens Rødder.

De Stykker, som Kurven afskjærer af den rette Linie, regnede fra (a, b), have Produktet

$$P = (1 + \alpha^2)^{\frac{n}{2}}(a - x_1)(a - x_2)\dots(a - x_n),$$

men af Identiteten (86) findes, ved at sætte a for x,

$$f(a, b) = A(a - x_1)(a - x_2)\dots(a - x_n);$$

altsaa er

$$P = \frac{(1+a^2)^{\frac{n}{2}}}{A} f(a,\, b). \qquad (87)$$

Er $(a_1,\, b_1)$ et andet Punkt i samme eller en dermed parallel Linie, og er P_1 det med P analoge Produkt, faar man

$$P : P_1 = f(a, b) : f(a_1,\, b_1). \qquad (88)$$

Lad nu $ABC\ldots$ være en vilkaarlig Polygon, og lad $(B)'$ betegne Produktet af de Stykker, som Kurven afskjærer paa BC, $'(B)$ Produktet af de Stykker, som den afskjærer paa BA, Stykkerne i begge Tilfælde regnede fra B. Man faar da

$$'(A)\,'(B)\,'(C)\ldots = (A)'\,(B)'\,(C)'\ldots, \qquad (89)$$

idet man let ser, at Indsættelse af de ovenfor fundne Udtryk for Produkterne gjør (89) identisk. Hver Vinkelspids af Polygonen benyttes nemlig paa begge Sider af Lighedstegnet, saa at de samme Faktorer $f(a, b)$ forekomme paa begge Sider, og hver Side af Polygonen benyttes ogsaa paa begge Sider af Lighedstegnet, saa at de samme Faktorer, indeholdende a, findes paa begge Sider. (Carnots Sætning.)

71. Vi ville nu anvende den beviste Sætning i nogle specielle Tilfælde:

1. Polygonen en Trekant; Kurven en ret Linie. Man faar, idet Liniens Skjæringspunkt med Siderne ere a, b, c, den bekjendte Sætning:

$$Ac \,.\, Ba \,.\, Cb = Ab \,.\, Bc \,.\, Ca.$$

2. Kurven et Keglesnit; Polygonen en omskreven Trekant med Sidernes Røringspunkter a, b og c. Man faar

$$Ac^2 \,.\, Ba^2 \,.\, Cb^2 = Ab^2 \,.\, Bc^2 \,.\, Ca^2$$

eller

$$Ac \,.\, Ba \,.\, Cb = \pm\, Ab \,.\, Bc \,.\, Ca.$$

Øverste Fortegn kan ikke bruges, da de tre Røringspunkter ikke kunne ligge i en ret Linie; benyttes nederste Fortegn, udtrykker Ligningen en tidligere bevist Sætning (50).

3. Kurven er af tredie Orden; Polygonens Sider ere tre Vendetangenter med Røringspunkterne a, b og c. Man faar

$$Ac^3 . Ba^3 . Cb^3 = Ab^3 . Bc^3 . Ca^3$$

eller

$$Ac . Ba . Cb = Ab . Bc . Ca,$$

idet vi forudsætte, at de tre Tangenter ere reelle. Ligningen viser, at de tre Røringspunkter ligge i en ret Linie. En nærmere Undersøgelse, som vi ikke her ville gaa ind paa, viser, at enhver Linie gjennem to af Røringspunkterne ogsaa gaa gjennem et tredie (dersom vi i Exp. Pg. 68 lade A, A_1 og A_2, B, B_1 og B_2 falde sammen i to Vendepunkter, maa C, C_1 og C_2 ogsaa falde sammen i et Vendepunkt), og at 6 af de 9 Vendetangenter altid ere imaginære.

4. Kurven er af fjerde Orden, og Polygonen er en Trekant, hvis Sider ere tre Dobbelttangenter; lad AB røre i c og c_1 o. s. v. Man faar da

$$Ac . Ac_1 . Ba . Ba_1 . Cb . Cb_1 = \pm Ab . Ab_1 . Bc . Bc_1 . Ca . Ca_1,$$

der viser, at et Keglesnit gjennem de 5 Røringspunkter enten gaar gjennem det 6te eller gjennem det, der, i Forbindelse med dette, deler Siden harmonisk.

Andre specielle Sætninger kunne udledes af Carnots f. Ex. ved at lade A fjerne sig i det Uendelige, hvorved $'(A)$ og $(A)'$ udgaa af Ligningen, eller ved at lade A falde paa Kurven, hvorved Forholdet af de to uendelig smaa Stykker erstattes ved Forholdet mellem Sinusserne af Sidernes Vinkler med Tangenten.

Vi ville endnu betragte et Tilfælde. Vi antage, at Kurven har et Mangefoldspunkt i A, og at vi paa en Linie gjennem A vælge et Punkt B, hvis Afstand fra A er uendelig lille af første Orden. En anden Linie gjennem B skjærer Kurvens Grene i C, D, $E \ldots$ Til disse to Linier føje vi en vilkaarlig tredie Linie og anvende nu Carnots Sætning paa den saaledes dannede Trekant og Kurven; antage vi nu at AB i A skjærer Kurven i α Punkter, faa vi

$$\ldots AB^{\alpha} = BC \,.\, BD \,.\, BE \ldots,$$

idet de udeladte Faktorer ere endelige; vi se heraf, at α er lig Summen af Ordnerne af de uendelig smaa Linier BC, BD, $BE \ldots$ Denne Sætning kan ofte med Fordel anvendes til Bestemmelse af en uendelig lille Linies Orden eller til Bestemmelse af Antallet af sammenfaldende Skjæringspunkter.

72. **Poler og Polarer.** Gjennem et vilkaarligt Punkt O trækkes en Linie, der skjærer en Kurve af $n$te Orden i Punkter, hvis Afstande fra O ere $\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n$. Paa Linien bestemmes et Punkt med Afstanden ρ, idet

$$\frac{n}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \ldots + \frac{1}{\rho_n} \text{ eller } \Sigma\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right) = 0. \quad (90)$$

Det geometriske Sted for Punktet er da en ret Linie, Punktets Polarlinie; vi kunne nemlig skrive Kurvens Ligning, idet O er Begyndelsespunkt

$$A\left(\frac{1}{r}\right)^n + (B \cos \theta + C \sin \theta)\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \ldots = 0,$$

hvoraf

$$\frac{n}{\rho} = \Sigma \frac{1}{\rho} = -\frac{B \cos \theta + C \sin \theta}{A},$$

altsaa

$$nA + Bx + Cy = 0 \text{ eller } nu_0 + u_1 = 0. \quad (91)$$

I Almindelighed dannes Polarkurven af Ordnen k, idet vi sætte

$$\Sigma\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_k}\right)=0$$

eller

$$\Sigma\left[\frac{1}{\rho^k}-\frac{1}{\rho^{k-1}}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\ldots\right)+\ldots\pm\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_k}\right]=0.$$

I en af Parentheserne, hvor Nævnerne have p Faktorer, er der $C_{k,p}$ Led; ved Summationen faar man da af saadanne Led $C_{n,k}\,.\,C_{k,p}$; heri maa den symmetriske Funktion $\Sigma\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p}$ findes $\frac{C_{n,k}\,.\,C_{k,p}}{C_{n,p}}$ Gange; ved Divisjon med $C_{n,k}$ og Multiplikation med $A\rho^n$ og, idet

$$A\rho^p\,\Sigma\frac{1}{\rho_1\rho_2\ldots\rho_p}=(-1)^p\,u_p,$$

faar man da Ligningen for Polarkurven

$$u_0+\frac{k}{n}u_1+\frac{k(k-1)}{n(n-1)}u_2+\ldots\frac{[k][n-k]}{[n]}u^k=0. \quad (92)$$

Man ser let, at enhver af disse Polarkurver tillige er Polarkurve for dem af højere Orden.

73. Særligt mærkes Polaren af $(n-1)$te Orden, den saakaldte **første Polar**, der faar Ligningen

$$nu_0+(n-1)u_1+(n-2)u_2+\ldots+u_{n-1}=0. \quad (93)$$

Denne Kurve spiller en vigtig Rolle ved Undersøgelsen af algebraiske Kurver. Vi skulle nu vise dens vigtigste Egenskaber.

Et Punkts første Polar gaar gjennem Røringspunkterne for alle Tangenter fra Punktet til Hovedkurven.

Vi kunne tage det givne Punkt som Begyndelsespunkt; Røringspunkterne bestemmes da ved Ligningen

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}=0 \text{ eller } x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}-nu=0, \quad (94)$$

men denne Ligning falder sammen med Polarens, idet som bekjendt for den homogene Funktion u_p

$$x\frac{du_p}{dx}+y\frac{du_p}{dy}=pu_p.$$

Der kan altsaa i Almindelighed trækkes $n(n-1)$ Tangenter fra et givet Punkt til Kurven eller, den almindelige Kurve af $n$te Orden er af Klassen $n(n-1)$. Da der gjennem $n(n-1)$ Punkter kun kan lægges een Kurve af $(n-1)$te Orden $\left(n(n-1)>\frac{(n-1)(n+2)}{2}\right)$, er Polaren bestemt ved Røringspunkterne og er saaledes defineret ved deskriptive Egenskaber. Ligningen for Polaren til Punktet (x_1, y_1) er derfor

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}-nu=x_1\frac{du}{dx}+y_1\frac{du}{dy}, \quad (95)$$

idet denne Ligning af Graden $n-1$ bestemmer Røringspunkterne.

Ligningen for Polarlinien til (x_1, y_1) faar en lignende Form. Flyttes nemlig Begyndelsespunktet til dette Punkt, bliver Kurvens Ligning

$$f(x_1+x,\ y_1+y)=(u)+\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y+\ldots=0,$$

idet Parenthesen betegner, at x_1 og y_1 ere satte for x og y. Ligningen for Polarlinien er nu

$$n(u)+\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y=0$$

eller med det oprindelige Begyndelsespunkt

$$x_1\left(\frac{du}{dx}\right)+y_1\left(\frac{du}{dy}\right)-n(u)=x\left(\frac{du}{dx}\right)+y\left(\frac{du}{dy}\right). \quad (96)$$

Ligningerne for Polarlinien og for den første Polar antage, naar Kurvens Ligning gjøres homogen ved Indførelse af z og z_1, Formen,

$$x\left(\frac{du}{dx}\right) + y\left(\frac{du}{dy}\right) + z\left(\frac{du}{dz}\right) = 0;$$

$$x_1\frac{du}{dx} + y_1\frac{du}{dy} + z_1\frac{du}{dz} = 0,$$

da man nemlig, ifølge den nævnte Sætning om homogene Funktioner, har

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = nu.$$

Alle Polarkurverne til et Punkt P paa Hovedkurven røre denne i dette Punkt.

Tages O til Begyndelsespunkt, bliver nemlig Kurvens Ligning

$$u_1 + u_2 + \ldots = 0$$

og Polarkurvens Ligning

$$\frac{k}{n}u_1 + \frac{k(k-1)}{n(n-1)}u_2 + \ldots = 0,$$

saa at de begge faa Tangenten $u_1 = 0$.

Paa samme Maade ses, at Polarkurverne til et q-dobbelt Punkt i dette Punkt have et Mangefoldspunkt af samme Natur. Polarkurverne af lavere end $q$de Orden blive ubestemte.

Den første Polar til ethvert Punkt gaar gjennem Hovedkurvens Mangefoldspunkter; er et saadant k-dobbelt, bliver det paa Polaren $k-1$ dobbelt, og har det l i een Linie sammenfaldende Tangenter, faar Polaren i denne Linie $l-1$ sammenfaldende Tangenter.

Lad os tage Mangefoldspunktet til Begyndelsespunkt og den Linie, i hvilken l Tangenter falde sammen til y-Axe; Kurvens Ligning er da (61)

$$u_k + u_{k+1} + \ldots = 0,$$

hvor $u_k = x^l v$, idet v er en Funktion af Graden $k - l$. De laveste Led i Ligningen for Polaren til (x_1, y_1) ere da (94)

$$x_1 \frac{du_k}{dx} + y_1 \frac{du_k}{dy} + \ldots,$$

altsaa af Graden $k - 1$, saa at Punktet er $(k - 1)$-dobbelt; man ser desuden, at x^{l-1} bliver Faktor i disse Led, og $x = 0$ er derfor en Linie, i hvilken $l - 1$ Tangenter i Mangefoldspunktet falde sammen.

Heraf følger, at, dersom Kurven har en Spids vil den første Polar til ethvert Punkt gaa gjennem Spidsen og røre dennes Tangent; den skjærer derfor Spidsen i tre sammenfaldende Punkter. Fra et Punkt kan der derfor kun trækkes $n(n-1) - 3$ Tangenter til en saadan Kurve (se 74). Falder Punktet i Spidsen, faar Polaren selv i dette Punkt en Spids med samme Tangent som Kurvens. I de to Spidser falde 6 Skjæringspunkter (63) sammen, eller 3 af Tangenterne fra Spidsen falde sammen i dennes Tangent. Altsaa:

Af de Tangenter, der kunne trækkes til en Kurve fra en af dens Spidser, falde tre sammen.

Af en Kurves Skjæringspunkter med en af dens Vendetangenter falde tre sammen.

I den sidste Sætning er Vendetangenten taget som dualistisk svarende til Spidsen; Sætningen udtrykker da, at denne Definition stemmer med Vendetangentens oprindelige Definition, og vi have saaledes her givet det i 68 lovede Bevis.

Det geometriske Sted for de Punkter, hvis Polarlinier gaa gjennem et givet Punkt, er dettes første Polar.

At Polarlinien til (x, y) indeholder (x_1, y_1) udtrykkes nemlig ved (95), naar man deri ombytter x og y med x_1 og y_1; derved ændres Ligningen imidlertid til (94).

De Punkter, hvis Polarlinier gaa gjennem to givne Punkter, altsaa falde sammen med en given Linie, ere derfor Skjæringspunkter for de to Punkters første Polarer; der er derfor $(n-1)^2$ Punkter, der have en given Polarlinie. Man kalder disse Punkter Polarliniens Poler.

Af den her beviste Sætning følger ogsaa, at den første Polar gaar gjennem Tangenternes Røringspunkter, thi et Røringspunkts Polarlinie er Punktets Tangent, og da denne gaar gjennem det givne Punkt hører det til de Punkter, for hvilke den første Polar er geometrisk Sted.

Et Punkts første Polar var, som vi saa, deskriptiv bestemt; det samme gjælder da ogsaa om den anden Polar (Polarkurven af Ordnen $n-2$), da denne er første Polar til Hovedkurvens første Polar o. s. v. Sætningerne kunne da omformes ved Dualitetsprincipet, og en Linie faar derved et Polpunkt og Polkurver af indtil $(n-1)$te Orden. Man maa erindre, at Polarlinien svarer dualistisk til Polpunktet og ikke til Polen, af hvilke der er $(n-1)^2$. Til en Linie hører altsaa $(n-1)^2$ Poler, dersom Kurven opfattes som Punktfrembringelse, men eet Polpunkt, dersom den opfattes som Liniefrembringelse.

Exp. $ax^2 + y^3 = 0$. Den første Polar til (x_1, y_1) har Ligningen $2axx_1 + 3y_1y^2 + ax^2 = 0$, medens Polarlinien har Ligningen $2axx_1 + 3yy_1^2 + ax_1^2 = 0$. Tangenten til Punktet (x, y) har Ligningen $2axX + 3y^2Y + ax^2 = 0$; i Systemet (u, v) har Tangenten derfor Koordinaterne $u = \frac{2}{x}$; $v = \frac{3y^2}{ax^2}$; herved faas Kurvens Klasseligning at være $27u^2 = 4av^3$. Polarlinien til

(x_1, y_1) har Koordinaterne $u_1 = \frac{2}{x_1}$; $v_1 = \frac{3y_1^2}{ax_1^2}$; denne Linies Polpunkt har Ligningen $4avv_1^2 - 18uu_1 - 9u_1^2 = 0$ og følgelig Koordinaterne $\frac{2}{u_1}$ og $-\frac{4v_1^2 a}{9u_1 v}$ eller x_1 og $-\frac{y_1^4}{ax_1^2}$. Ved at søge det givne Punkts Polarlinie og derpaa denne Linies Polpunkt, komme vi saaledes kun tilbage til det givne Punkt, dersom dette ligger paa Kurven.

Diametre. Middelpunktet x for n Punkter x_1, $x_2 \ldots x_n$ af en ret Linie er det Punkt, som bestemmes ved Ligningen $nx = x_1 + x_2 \ldots + x_n$ eller $\Sigma(x - x_1) = 0$; sætte vi i Kurvens Ligning $x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$, faa vi en Ligning af Formen

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} + \ldots = 0,$$

hvor $b = 0$ er Betingelsen for, at (x_1, y_1) er Middelpunktet for Kurvens Skjæringspunkter med den ved θ bestemte Linie. Da x_1 og y_1 indgaa lineært i b, bliver det geometriske Sted for de paa et System af parallele Korder bestemte Middelpunkter en ret Linie, Kordesystemets Diameter. Denne Linies Ligning afhænger kun af u_n og u_{n-1}; Kurvens Diametre ere derfor ogsaa Diametre for Kurvens Asymptotekomplex.

De Punkter, for hvilke Summen af Produkterne af to og to af Afstandene til Parallelernes Skjæringspunkter med Kurven er Nul, bestemmes ved Ligningen $c = 0$. Denne Ligning tilhører et Keglesnit, Kordesystemets Diametralkeglesnit og saaledes videre.

Diametren er Polarlinien til det ved Kordernes Retning bestemte uendelig fjerne Punkt. Man har nemlig, idet R ligger paa Polarlinien til O o. s. v.,

$$0 = \Sigma \left(\frac{1}{OR} - \frac{1}{OR_1} \right) = \Sigma \frac{RR_1}{OR \, . \, OR_1},$$

men naar O fjerner sig i det Uendelige, kunne Nævnerne udelades, idet Forholdet mellem to hvilkesomhelst af dem konvergerer mod 1; man faar altsaa

$$\Sigma RR_1 = 0,$$

der netop bestemmer Diametren.

74. **De Plückerske Ligninger** udtrykke Relationer mellem de Tal, der angive en Kurves Orden (n), Klasse (n'), Antal af Dobbeltpunkter (d), af Dobbelttangenter (d'), Spidser (e) og Vendetangenter (e').

Vi have set, at den første Polar skjærer Kurven i $n(n-1)$ Punkter; i dette Tal er imidlertid hvert Dobbeltpunkt medregnet som to, hver Spids som tre Skjæringspunkter, idet Polaren gaar gjennem alle Dobbeltpunkterne og i Spidserne desuden rører de to Grenes fælles Tangent. Antallet af Tangenter fra et Punkt til Kurven bliver derfor kun $n(n-1)$, dersom vi tælle enhver Linie gjennem et Dobbeltpunkt som to, gjennem en Spids som tre sammenfaldende Tangenter. Denne Sammenfalden af Tangenter viser sig ogsaa tydeligt paa en Figur, naar Dobbeltpunktet og Spidsen betragtes som Grændseformer.

Kurvens Klasseligning maa saaledes, ved at kombineres med Ligningen for et vilkaarligt Punkt, bestemme Linierne fra dette til Dobbeltpunkterne og Spidserne henholdsvis to og tre Gange. Dette medfører, at Ligningen har Formen

$$A^2 \, . \, B^3 \, . \, U = 0,$$

hvor $A = 0$ deler sig i Dobbeltpunkternes, $B = 0$ i Spidsernes Ligninger. Ved Kurvens Klasseligning mener man imidlertid den irreduktible Ligning, som man faar,

naar Faktorerne A og B bortdivideres; man har altsaa $n' = n(n-1) - 2d - 3e$; af Dualitetsprincipet følger da, at man ogsaa maa have $n = n'(n'-1) - 2d' - 3e'$, idet man af Kurvens Punktligning, som den vilde udledes af Tangentligningen, udskiller de Ligninger, som bestemme Dobbelttangenterne (hver 2 Gange) og Vendetangenterne (hver 3 Gange).

En tredie Ligning mellem de angivne Tal faar man ved følgende Betragtning: En Kurve bestemmer sin reciproke Kurve og omvendt; der maa derfor kræves det samme Antal Bestemmelser ved begge Kurver; nu have vi set, at det, at Kurverne skal have et Dobbeltpunkt i Punktkoordinater er 1, at den skal have en Spids 2 Bestemmelser. Den reciproke Kurve er af Ordnen n', har d' Dobbeltpunkter og e' Spidser; vi faa altsaa ved at sætte Antallene af manglende Bestemmelser for begge Kurver ligestore

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2e = \frac{n'(n'+3)}{2} - d' - 2e',$$

en Ligning, der kan erstattes ved den simplere $3(n'-n) = e' - e$, der let udledes af de tre fundne Ligninger.

Vi have nu fundet de tre Plückerske Ligninger

$$\left.\begin{aligned} n' &= n(n-1) - 2d - 3e, \\ n &= n'(n'-1) - 2d' - 3e', \\ 3(n'-n) &= e' - e \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

og se deraf, at tre af de en Kurve tilhørende 6 karakteristiske Tal bestemme de øvrige.

Herved forklares det, at den almindelige Kurve af Ordnen n er af Klassen $n(n-1)$ og den almindelige Kurve af Klassen n' er af Ordnen $n'(n'-1)$; vi se nemlig, at, hvad der, set fra den ene Side, er almindeligt, bliver specielt, naar det ses fra den anden Side, og det